

1 Fragen zu Definitionen

1.1 Topologischer Raum

Definition 1

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar (X, \mathfrak{T}) bestehend aus einer Menge X und $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften

- (i) $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$
- (ii) Sind $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}$, so ist $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{T}$
- (iii) Ist I eine Menge und $U_i \in \mathfrak{T}$ für jedes $i \in I$, so ist $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathfrak{T}$

Die Elemente von \mathfrak{T} heißen **offene Teilmengen** von X .

$A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Ich glaube es ist unnötig in (i) zu fordern, dass $\emptyset \in \mathfrak{T}$ gilt, da man das mit (iii) bereits abdeckt:

Sei in (iii) die Indexmenge $I = \emptyset$. Dann muss gelten:

$$\bigcup_{i \in \emptyset} U_i = \emptyset \in \mathfrak{T}$$

1.2 Diskret

Definition 2

Sei X ein topologischer Raum und $M \subseteq X$.

M heißt **diskret** in X , wenn M in X keinen Häufungspunkt hat.

Laut http://www.uni-protokolle.de/Lexikon/Diskreter_Raum.html#Diskrete_Teilmenge_eines_topologischen_Raums könnte man **diskret** wie folgt definieren:

Definition 3

Sei X ein topologischer Raum.

- a) Ein Punkt $x \in X$ heißt **isolierter Punkt**, wenn $\{x\}$ offen ist.
- b) Ein topologischer Raum heißt **diskreter topologischer**, Raum wenn jeder seiner Punkte isoliert ist.

Sind diese beiden Definitionen äquivalent? Falls ja, finde ich die zweite besser. Da benötigt man den Begriff „Häufungspunkt“ nicht, den wir nicht definiert hatten.

1.3 Simpliciale Abbildung

Definition 4

Seien K, L Simplizialkomplexe. Eine stetige Abbildung

$$f : |K| \rightarrow |L|$$

heißt **simplizial**, wenn für jedes $\Delta \in K$ gilt:

- a) $f(\Delta) \in L$
- b) $f|_{\Delta} : \Delta \rightarrow f(\Delta)$ ist eine affine Abbildung.

Ist die Definition so richtig? Was bedeutet $|K|$ und $|L|$ in

$$f : |K| \rightarrow |L|$$

1.4 Knotendiagramm

Definition 5

Ein **Knotendiagramm** eines Knotens γ ist eine Projektion $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow E$ auf eine Ebene E , sodass $|(\pi|_C)^{-1}(x)| \leq 2$ für jedes $x \in D$.

Ist $(\pi|_C)^{-1}(x) = \{y_1, y_2\}$, so **liegt** y_1 **über** y_2 , wenn $(y_1 - x) = \lambda(y_2 - x)$ für ein $\lambda > 1$ ist.

Sollte das jeweils $\pi|_C$ (sprich: „ π eingeschränkt auf C “) sein? Was ist C ?

1.5 Homotope Abbildungen und äquivalente Knoten

Definition 6

Zwei Knoten $\gamma_1, \gamma_2 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißen **äquivalent**, wenn es eine stetige Abbildung

$$H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

gibt mit

$$H(z, 0) = \gamma_1(z)$$

$$H(z, 1) = \gamma_2(z)$$

und für jedes feste $t \in [0, 1]$ ist

$$H_z : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2, z \mapsto H(z, t)$$

ein Knoten. Die Abbildung H heißt **Isotopie** zwischen γ_1 und γ_2 .

Fehlt hier nicht etwas wie „ $\forall z \in S^1$ “?

Definition 7

Seien X, Y topologische Räume, $x_0 \in X, y_0 \in Y, f, g : X \rightarrow Y$ stetig mit $f(x_0) = y_0 = g(x_0)$.

f und g heißen **homotop** ($f \sim g$), wenn es eine stetige Abbildung $H : X \times I \rightarrow Y$ mit

$$H(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in X$$

$$H(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X$$

$$H(x_0, s) = y_0 \quad \forall s \in I$$

gibt.

Mir scheint der Begriff „homotope Abbildung“ bis auf die Eigenschaft „ $H(x_0, s) = y_0 \quad \forall s \in I$ “ mit dem Begriff „äquivalente Knoten“ übereinzustimmen. Der Knoten-Begriff ist dafür etwas spezieller nur auf Knoten bezogen. Stimmt das?

1.6 Basis und Subbasis

- Kennst du ein Beispiel für eine Subbasis in einem Topologischen Raum, die zugleich eine Basis ist?

- Kennst du ein Beispiel für eine Subbasis in einem Topologischen Raum, die keine Basis ist?
- Kennst du ein Beispiel für eine Basis in einem Topologischen Raum, die keine Subbasis ist?

1.7 Homotopie

Definition 8

Sei X ein topologischer Raum, $a, b \in X$, $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$ Wege von a nach b , d. h. $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = b$

- a) γ_1 und γ_2 heißen **homotop**, wenn es eine stetige Abbildung $H : I \times I \rightarrow X$ mit

$$H(t, 0) = \gamma_1(t) \quad \forall t \in [0, 1] =: I$$

$$H(t, 1) = \gamma_2(t) \quad \forall t \in [0, 1] =: I$$

und $H(0, s) = a$ und $H(1, s) = b$ für alle $s \in I$ gibt. Dann schreibt man: $\gamma_1 \sim \gamma_2$

H heißt **Homotopie** zwischen γ_1 und γ_2 .

- b) $\gamma_s : I \rightarrow X$, $\gamma_s(t) = H(t, s)$ ist Weg in X von a nach b für jedes $s \in I$.

Diese Definition finde ich seltsam. Sollte b) nicht eine Bedingung für „Homotopie“ sein? Falls nicht: Was wird in b) definiert?

1.8 Mannigfaltigkeit und MF mit Rand

Definition 9

Sei X ein topologischer Raum und $n \in \mathbb{N}$.

- a) Eine n -dimensionale **Karte** auf X ist ein Paar (U, φ) , wobei $U \subseteq X$ offen und $\varphi : U \rightarrow V$ Homöomorphismus von U auf eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$.
- b) Ein n -dimensionaler **Atlas** \mathcal{A} auf X ist eine Familie $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ von Karten auf X , sodass $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.

- c) X heißt (topologische) n -dimensionale **Mannigfaltigkeit**, wenn X hausdorffsch ist, eine abzählbare Basis der Topologie hat und ein n -dimensionalen Atlas besitzt.

Definition 10

Sei X ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis der Topologie. X heißt n -dimensionale **Mannigfaltigkeit mit Rand**, wenn es einen Atlas (U_i, φ_i) gibt, wobei $U_i \subseteq X_i$ offen und φ_i ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge von

$$R_{+,0}^n := \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_m \geq 0 \}$$

ist.

Wieso wird bei der Mannigfaltigkeit mit Rand nicht gefordert, dass sie eine abzählbare Basis haben soll? Sollte man nicht vielleicht hinzufügen, dass der Atlas n -dimensional sein soll?