

## Aufgabe 1

### Teilaufgabe a)

$$L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

### Teilaufgabe b)

**Gesucht:**  $\det(A)$

Sei  $P \cdot L = L \cdot R$ , die gewohnte LR-Zerlegung.

Dann gilt:

$$\det(A) = \det(L) \cdot \det(R) / \det(P)$$

$\det(L) = 1$ , da alle Diagonalelemente 1 sind und es sich um eine untere Dreiecksmatrix handelt.

$\det(R) = r_{11} \cdot \dots \cdot r_{nn}$  da es sich um eine obere Dreiecksmatrix handelt.

$\det(P) = 1$  oder  $-1$

Das Verfahren ist also:

1. Berechne Restmatrix R mit dem Gaußverfahren.
2. Multipliziere die Diagonalelemente von R
3. falls die Anzahl an Zeilenvertauschungen ungerade ist negiere das Produkt aus 2 (eine Zeilenvertauschung verändert lediglich das Vorzeichen und P ist durch Zeilenvertauschungen aus der Einheitsmatrix hervorgegangen)

## Aufgabe 2

### Teilaufgabe a)

Formel:  $y_i = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} y_j \cdot l_{ij}}{l_{ii}}$

Anmerkung:  $l_{ii}$  kann nicht 0 sein, da L dann nicht mehr invertierbar wäre.

Algorithmus:

---

**Algorithm 1** TODO

---

```
for  $i = 1$  to  $i = n$  do
   $sum \leftarrow 0$ 
  for  $j = 1$  to  $j = i - 1$  do
     $sum \leftarrow sum + y_j \cdot l_{ij}$ 
  end for
   $y_i \leftarrow \frac{b_i - sum}{l_{ii}}$ 
end for
```

---

(b)

---

**Algorithm 2** Löse ein LGS  $Ax = b$ 

---

**Require:** Matrix  $A$ , Vektor  $b$

```
procedure LOESELGS( $A, b$ )
   $P, L, R \leftarrow \text{LRZER}(A)$ 
   $b^* \leftarrow P \cdot b$ 
   $c \leftarrow \text{VORSUB}(L, b^*)$ 
   $x \leftarrow \text{RUECKSUB}(R, c)$ 
  return  $x$ 
end procedure
```

---

### Teilaufgabe c)

Aufwand:

- Vorwärts-/Rückwärtssubstitution: jeweils  $\frac{1}{2} \cdot n^2$
- LR-Zerlegung:  $\frac{1}{3}n^3$
- gesamt:  $\frac{1}{3}n^3 + n^2$

## Aufgabe 3

### Teilaufgabe a)

$$L_0(x) = -\frac{1}{6} \cdot (x^3 - 3x^2 + 2x) \quad (1)$$

$$L_1(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^3 - 2x^2 - x + 2) \quad (2)$$

$$L_2(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x^3 - x^2 - 2x) \quad (3)$$

$$L_3(x) = \frac{1}{6} \cdot (x^3 - x) \quad (4)$$

Damit ergibt sich:

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 1 \quad (5)$$

Anmerkung: Es ist in der Klausur allerdings nicht notwendig die Monomdarstellung zu berechnen außer es wird explizit verlangt. (Das spart viel Zeit)

### Teilaufgabe b)

Zunächst die dividierten Differenzen berechnen:

$$f[x_0] = 7, \quad f[x_1] = 1, \quad f[x_2] = -1, \quad f[x_3] = 7 \quad (6)$$

$$f[x_0, x_1] = -6, \quad f[x_1, x_2] = -2, \quad f[x_2, x_3] = 8 \quad (7)$$

$$f[x_0, x_1, x_2] = 2, \quad f[x_1, x_2, x_3] = 5 \quad (8)$$

$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 1 \quad (9)$$

Insgesamt ergibt sich also

$$p(x) = 7 - (x + 1) \cdot 6 + (x + 1) \cdot x \cdot 2 + (x + 1) \cdot x \cdot (x - 1) \quad (10)$$

## Aufgabe 4

### Teilaufgabe a)

1. Ordnung 3 kann durch geschickte Gewichtswahl erzwungen werden.
2. Ordnung 4 ist automatisch gegeben, da die QF symmetrisch sein soll.
3. Aufgrund der Symmetrie gilt Äquivalenz zwischen Ordnung 5 und 6. Denn eine hätte die QF Ordnung 5, so wäre wegen der Symmetrie Ordnung 6 direkt gegeben. Ordnung 6 wäre aber bei der Quadraturformel mit 3 Knoten das Maximum, was nur mit der Gauß-QF erreicht werden kann. Da aber  $c_1 = 0$  gilt, kann es sich hier nicht um die Gauß-QF handeln. Wegen erwähnter Äquivalenz kann die QF auch nicht Ordnung 5 haben.

Da  $c_1 = 0$  gilt, muss  $c_3 = 1$  sein (Symmetrie). Und dann muss  $c_2 = \frac{1}{2}$  sein. Es müssen nun die Gewichte bestimmt werden um Ordnung 3 zu garantieren mit:

$$b_i = \int_0^1 L_i(x) dx \quad (11)$$

$$b_1 = \frac{1}{6}, \quad (12)$$

$$b_2 = \frac{4}{6}, \quad (13)$$

$$b_3 = \frac{1}{6} \quad (14)$$

### Teilaufgabe b)

Als erstes ist festzustellen, dass es sich hier um die Simpsonregel handelt und die QF

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \cdot \frac{1}{6} \cdot \left( f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right) \quad (15)$$

ist. Wenn diese nun auf  $N$  Intervalle aufgefittet wird gilt folgendes:

$$h = \frac{(b-a)}{N} \quad (16)$$

$$\int_a^b f(x) dx = h \cdot \frac{1}{6} \cdot \left[ f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} f(a + i \cdot h) + 4 \cdot \sum_{l=0}^{N-1} f\left(a + \frac{1}{2} \cdot h + l \cdot h\right) \right] \quad (17)$$

$\sum_{i=1}^{N-1} f(a + i \cdot h)$  steht für die Grenzknoten (deshalb werden sie doppelt gezählt). Von den Grenzknoten gibt es insgesamt  $N - 2$  Stück, da die tatsächlichen Integralgrenzen  $a$  und  $b$  nur einmal in die Berechnung mit einfließen.

$\sum_{l=0}^{N-1} f(a + \frac{1}{2} \cdot h + l \cdot h)$  sind die jeweiligen mittleren Knoten der Intervalle. Davon gibt es  $N$  Stück.

### Teilaufgabe c)

TODO

## Aufgabe 5

Es gibt unendlich viele symmetrische QF mit  $0 = c_1 < c_2 < c_3$  und Ordnung  $\geq 4$ . Die Knoten müssen nur folgende Eigenschaft erfüllen:

$$c_i = 1 - c_{s+1-i}$$

Die Gewichte sind durch Vorgabe der Knoten und der Bedingung, dass die QF die Ordnung von  $s \geq 3$  erfüllen soll, nach VL bereits eindeutig bestimmt.

Anmerkung: Es gilt immer  $c_2 = \frac{1}{2}!$