

Aufgabe 1

Teilaufgabe a)

Erste Spalte:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} \quad (1)$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} \quad (2)$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} \quad (3)$$

(4)

Zweite Spalte:

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} \quad (5)$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{21} \cdot l_{31}}{l_{22}} \quad (6)$$

(7)

Dritte Spalte:

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{32}^2 - l_{31}^2} \quad (8)$$

Teilaufgabe b)

$$l_{11} = 2 \quad (9)$$

$$l_{21} = 1 \quad (10)$$

$$l_{31} = -2 \quad (11)$$

$$l_{22} = 3 \quad (12)$$

$$l_{32} = 1 \quad (13)$$

$$l_{33} = 1 \quad (14)$$

(15)

Die restlichen Einträge sind 0. (L ist immer eine untere Dreiecksmatrix)

Teilaufgabe c)

$$A \cdot x = b \Leftrightarrow L \cdot L^T \cdot x = b \quad (16)$$

$$L \cdot c = b \tag{17}$$

Löse 17 mit Vorwärtssubstitution.

$$L^T \cdot x = c \tag{18}$$

Löse 18 mit Rückwärtssubstitution.

$$x_3 = 3 \tag{19}$$

$$x_2 = 1 \tag{20}$$

$$x_1 = 2 \tag{21}$$

Aufgabe 2

Teilaufgabe a)

$$r_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot r_{kj} \quad (22)$$

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot r_{kj}}{r_{jj}} \quad (23)$$

```
for  $d \in \{1, \dots, n\}$  do  
    berechne d-te Zeile von R  
    berechne d-te Spalte von L  
end for
```

Aufgabe 3

Teilaufgabe a)

1. Selbstabbildung:

Sei $x \in D := [1.75, 2]$.

Dann:

$$F(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \leq 1 + \frac{1}{1.75} + \frac{1}{1.75^2} = 1 + \frac{44}{49} \leq 2 \quad (24)$$

und:

$$F(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1.75 \quad (25)$$

2. Abgeschlossenheit: D ist offensichtlich abgeschlossen.

3. Kontraktion:

F ist Lipschitz-stetig auf D und für alle $x \in D$ gilt:

$$|F'(x)| = \left| -\frac{1}{x^2} - 2 \cdot \frac{1}{x^3} \right| \leq \frac{240}{343} =: \theta < 1 \quad (26)$$

Also gilt auch $\forall x, y \in D$:

$$|F(x) - F(y)| \leq \theta \cdot |x - y| \quad (27)$$

Somit ist die Lipschitz- bzw. Kontraktions-Konstante θ .

Insgesamt folgt, dass F die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.