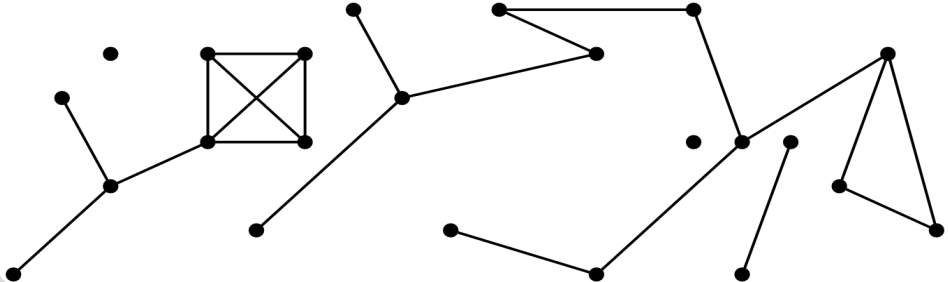


Graphentheorie I

Martin Thoma | 2. Juli 2013

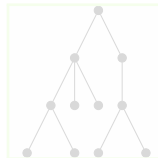
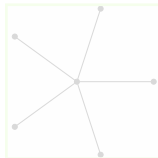
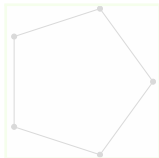
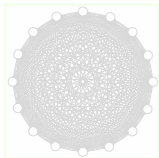
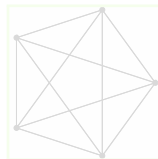
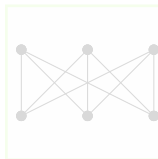
INSTITUT FÜR STOCHASTIK



- 1 Grundlagen
- 2 Spezielle Graphen
- 3 Strukturen in Graphen
- 4 Königsberger Brückenproblem
- 5 Ende

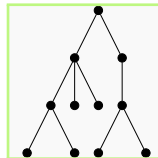
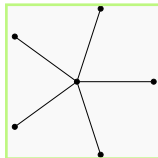
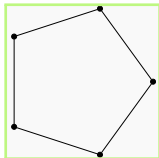
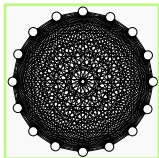
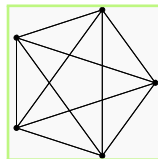
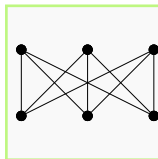
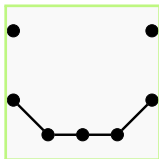
Graph

Ein Graph ist ein Tupel (E, K) , wobei $E \neq \emptyset$ die Eckenmenge und $K \subseteq E \times E$ die Kantenmenge bezeichnet.

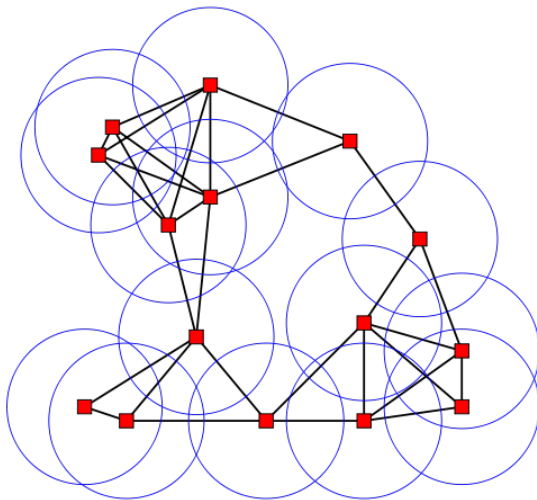


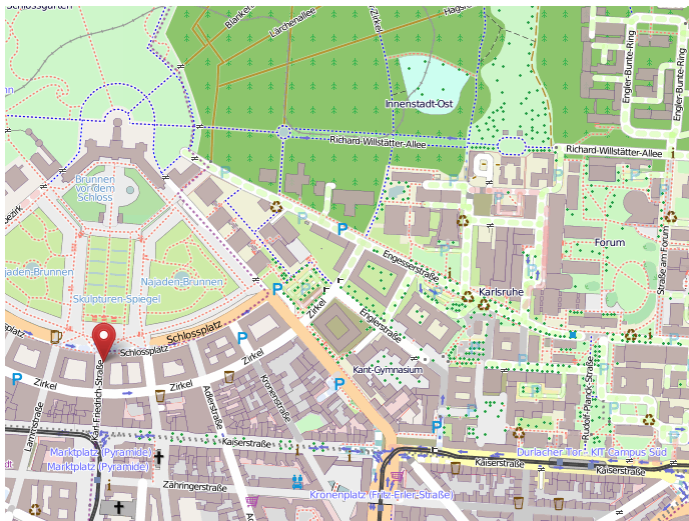
Graph

Ein Graph ist ein Tupel (E, K) , wobei $E \neq \emptyset$ die Eckenmenge und $K \subseteq E \times E$ die Kantenmenge bezeichnet.

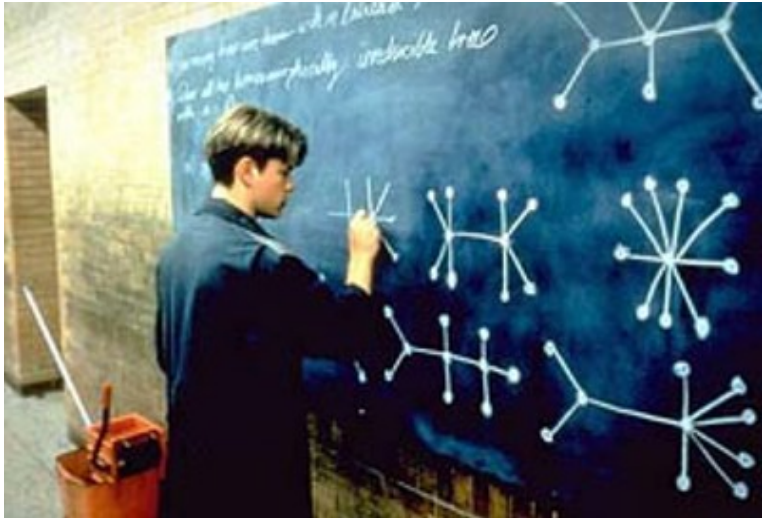


Knoten \Leftrightarrow Ecken





Good Will Hunting



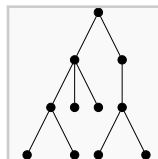
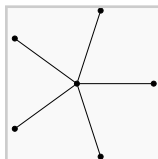
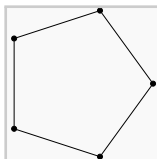
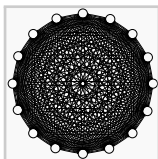
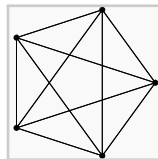
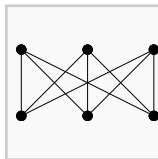
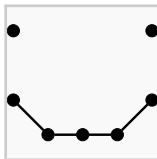
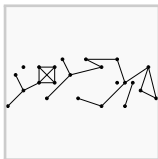
martin-thoma.de/uni/graph.html

Grad einer Ecke

Der **Grad** einer Ecke ist die Anzahl der Kanten, die von dieser Ecke ausgehen.

Isolierte Ecke

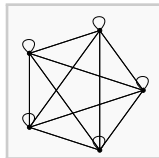
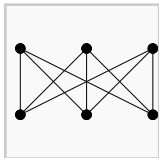
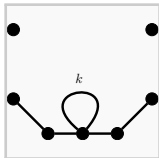
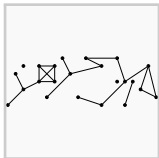
Hat eine Ecke den Grad 0, so nennt man ihn **isoliert**.



Schlinge

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $k = \{e_1, e_2\} \in K$ eine Kante.
 k heißt **Schlinge** : $\Leftrightarrow e_1 = e_2$

Ein Graph ohne Schlingen heißt „schlingenfrei“

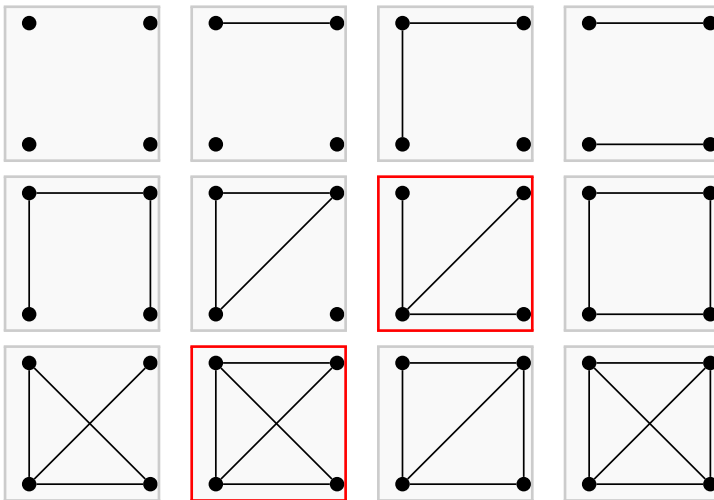


Aufgabe 1

Zeichnen Sie alle schlingenfreien Graphen mit genau vier Ecken.

Aufgabe 1

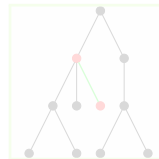
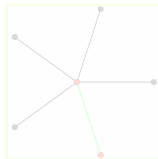
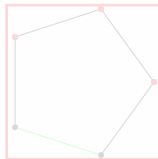
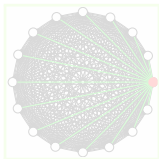
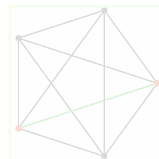
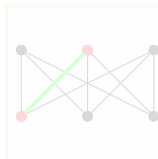
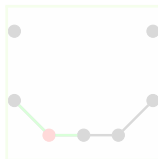
Zeichnen Sie alle schlingenfreien Graphen mit genau vier Ecken.



Inzidenz

Sei $e \in E$ und $k = \{e_1, e_2\} \in K$.

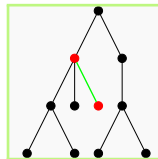
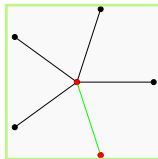
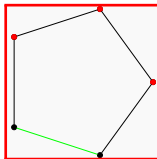
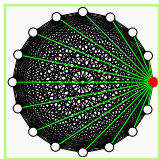
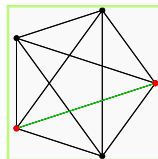
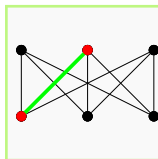
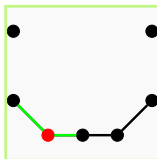
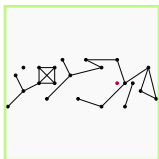
e heißt **inzident** zu $k : \Leftrightarrow e = e_1$ oder $e = e_2$



Inzidenz

Sei $e \in E$ und $k = \{e_1, e_2\} \in K$.

e heißt **inzident** zu $k : \Leftrightarrow e = e_1$ oder $e = e_2$

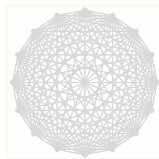
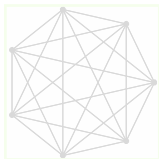
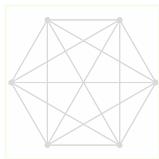
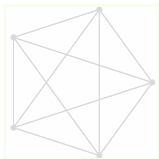
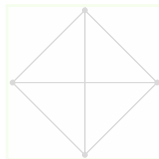
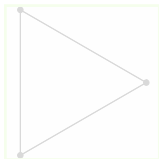
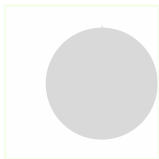


Vollständiger Graph

Sei $G = (E, K)$ ein Graph.

G heißt **vollständig** $:\Leftrightarrow K = E \times E \setminus \{ \{e, e\} \mid e \in E \}$

Ein vollständiger Graph mit n Ecken wird als K_n bezeichnet.

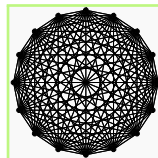
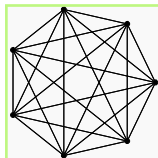
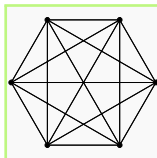
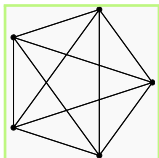
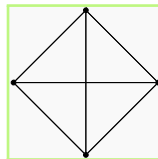
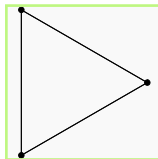
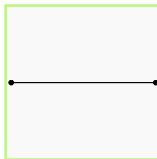
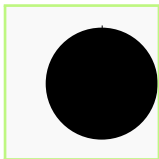


Vollständiger Graph

Sei $G = (E, K)$ ein Graph.

G heißt **vollständig** $:\Leftrightarrow K = E \times E \setminus \{ \{e, e\} \mid e \in E \}$

Ein vollständiger Graph mit n Ecken wird als K_n bezeichnet.

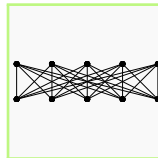
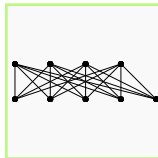
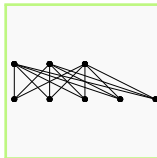
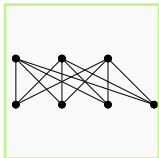
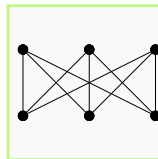
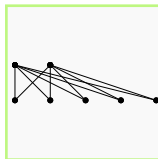
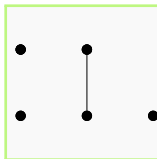
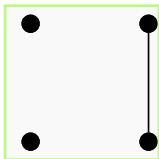


Bipartiter Graph

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A, B \subset E$ zwei disjunkte Eckenmengen mit $E \setminus A = B$.

G heißt **bipartit**

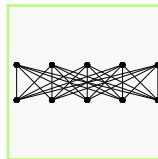
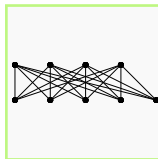
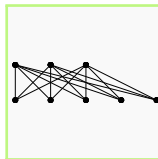
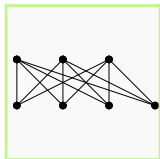
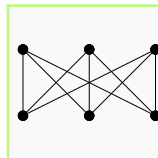
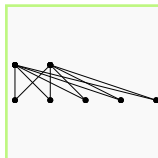
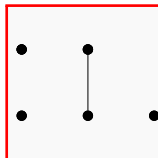
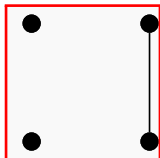
$:\Leftrightarrow \forall_{k=\{e_1, e_2\} \in K} : (e_1 \in A \text{ und } e_2 \in B) \text{ oder } (e_1 \in B \text{ und } e_2 \in A)$



Vollständig bipartiter Graph

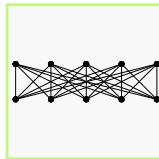
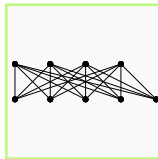
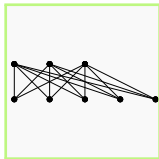
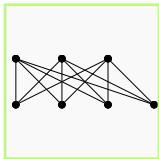
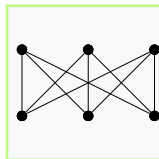
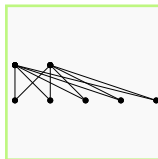
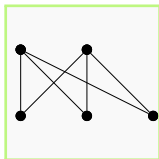
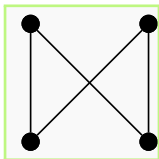
Sei $G = (E, K)$ ein bipartiter Graph und $\{A, B\}$ bezeichne die Bipartition.

G heißt **vollständig bipartit** $:\Leftrightarrow A \times B = K$



Vollständig bipartite Graphen

Bezeichnung: Vollständig bipartite Graphen mit der Bipartition $\{A, B\}$ bezeichnet man mit $K_{|A|,|B|}$.



Wie viele Ecken und wie viele Kanten hat der $K_{m,n}$?

Wie viele Ecken und wie viele Kanten hat der $K_{m,n}$?

$$\text{Ecken: } m + n \quad (1)$$

$$\text{Kanten: } m \cdot n \quad (2)$$

Kantenzug, Länge eines Kantenzuges und Verbindung von Ecken

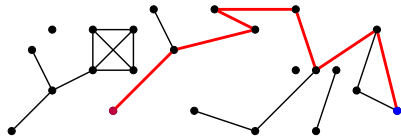
Kantenzug, Länge eines Kantenzuges und Verbindung von Ecken

Sei $G = (E, K)$ ein Graph.

Dann heißt eine Folge k_1, k_2, \dots, k_s von Kanten, zu denen es Ecken $e_0, e_1, e_2, \dots, e_s$ gibt, so dass

- $k_1 = \{ e_0, e_1 \}$
- $k_2 = \{ e_1, e_2 \}$
- ...
- $k_s = \{ e_{s-1}, e_s \}$

gilt ein **Kantenzug**, der e_0 und e_s **verbindet** und s seine **Länge**.

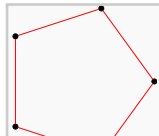
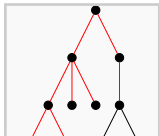
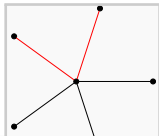
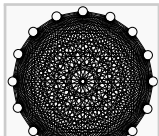
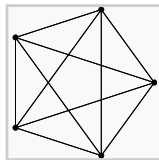
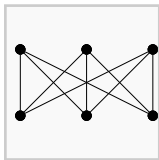
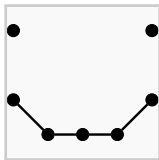
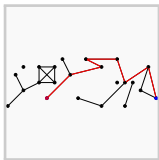


Geschlossener Kantenzug

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2, \dots, k_s)$ ein Kantenzug mit $k_1 = \{e_0, e_1\}$ und $k_s = \{e_{s-1}, e_s\}$.

A heißt **geschlossen** : $\Leftrightarrow e_0 = e_s$.

Ein Kantenzug wird durch den Tupel $(e_0, \dots, e_s) \in E^{s+1}$ charakterisiert.



Weg

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2 \dots, k_s)$ ein Kantenzug.
A heißt **Weg** : $\Leftrightarrow \forall_{i,j \in 1, \dots, s} : i \neq j \Rightarrow k_i \neq k_j$.

Salopp

Ein Kantenzug, bei dem man keine Kante mehrfach abläuft, ist ein Weg.

Achtung: Knoten dürfen mehrfach abgelaufen werden!

Weg

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2 \dots, k_s)$ ein Kantenzug.
 A heißt **Weg** $:\Leftrightarrow \forall_{i,j \in 1, \dots, s} : i \neq j \Rightarrow k_i \neq k_j$.

Salopp

Ein Kantenzug, bei dem man keine Kante mehrfach abläuft, ist ein Weg.

Achtung: Knoten dürfen mehrfach abgelaufen werden!

Weg

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2 \dots, k_s)$ ein Kantenzug.
A heißt **Weg** : $\Leftrightarrow \forall_{i,j \in 1, \dots, s} : i \neq j \Rightarrow k_i \neq k_j$.

Salopp

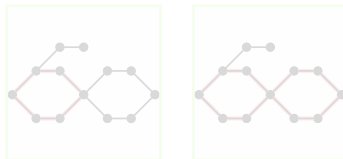
Ein Kantenzug, bei dem man keine Kante mehrfach abläuft, ist ein Weg.

Achtung: Knoten dürfen mehrfach abgelaufen werden!

Kreis

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2, \dots, k_s)$ ein Kantenzug.
 A heißt **Kreis** : \Leftrightarrow A ist geschlossen und ein Weg.

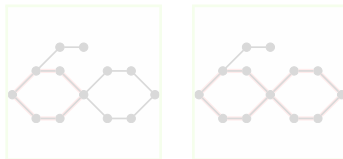
Manchmal wird das auch „einfacher Kreis“ genannt.



Kreis

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2 \dots, k_s)$ ein Kantenzug.
 A heißt **Kreis** $:\Leftrightarrow A$ ist geschlossen und ein Weg.

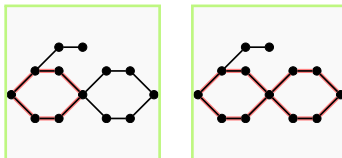
Manchmal wird das auch „einfacher Kreis“ genannt.



Kreis

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2, \dots, k_s)$ ein Kantenzug.
 A heißt **Kreis** $:\Leftrightarrow A$ ist geschlossen und ein Weg.

Manchmal wird das auch „einfacher Kreis“ genannt.



Zeigen Sie:

Wenn in einem Graphen $G = (E, K)$ jede Ecke min. Grad 2 hat, dann besitzt G einen Kreis einer Länge > 0 .

Sei $e_0 \in E$ eine beliebige Ecke aus G . Da e_0 min. Grad 2 hat, gibt es eine Kante k_0 .

Diese verbindet e_0 mit einer weiteren Ecke e_1 , die wiederum min. Grad 2 hat usw.

G hat endlich viele Ecken. Man erreicht also irgendwann eine Ecke e_j , die bereits als e_i durchlaufen wurde. Die Ecken $e_i, \dots, e_j = e_i$ bilden also einen Kreis ■

Zeigen Sie:

Wenn in einem Graphen $G = (E, K)$ jede Ecke min. Grad 2 hat, dann besitzt G einen Kreis einer Länge > 0 .

Sei $e_0 \in E$ eine beliebige Ecke aus G . Da e_0 min. Grad 2 hat, gibt es eine Kante k_0 .

Diese verbindet e_0 mit einer weiteren Ecke e_1 , die wiederum min. Grad 2 hat usw.

G hat endlich viele Ecken. Man erreicht also irgendwann eine Ecke e_j , die bereits als e_i durchlaufen wurde. Die Ecken $e_i, \dots, e_j = e_i$ bilden also einen Kreis ■

Zeigen Sie:

Wenn in einem Graphen $G = (E, K)$ jede Ecke min. Grad 2 hat, dann besitzt G einen Kreis einer Länge > 0 .

Sei $e_0 \in E$ eine beliebige Ecke aus G . Da e_0 min. Grad 2 hat, gibt es eine Kante k_0 .

Diese verbindet e_0 mit einer weiteren Ecke e_1 , die wiederum min. Grad 2 hat usw.

G hat endlich viele Ecken. Man erreicht also irgendwann eine Ecke e_j , die bereits als e_i durchlaufen wurde. Die Ecken $e_i, \dots, e_j = e_i$ bilden also einen Kreis ■

Zeigen Sie:

Wenn in einem Graphen $G = (E, K)$ jede Ecke min. Grad 2 hat, dann besitzt G einen Kreis einer Länge > 0 .

Sei $e_0 \in E$ eine beliebige Ecke aus G . Da e_0 min. Grad 2 hat, gibt es eine Kante k_0 .

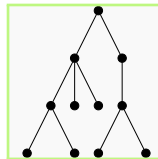
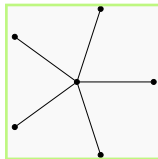
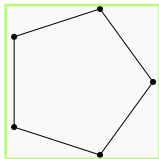
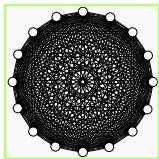
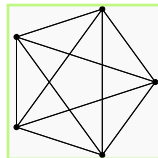
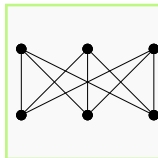
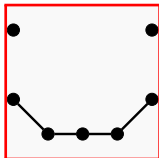
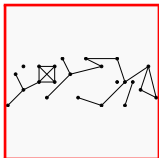
Diese verbindet e_0 mit einer weiteren Ecke e_1 , die wiederum min. Grad 2 hat usw.

G hat endlich viele Ecken. Man erreicht also irgendwann eine Ecke e_j , die bereits als e_i durchlaufen wurde. Die Ecken $e_i, \dots, e_j = e_i$ bilden also einen Kreis ■

Zusammenhängender Graph

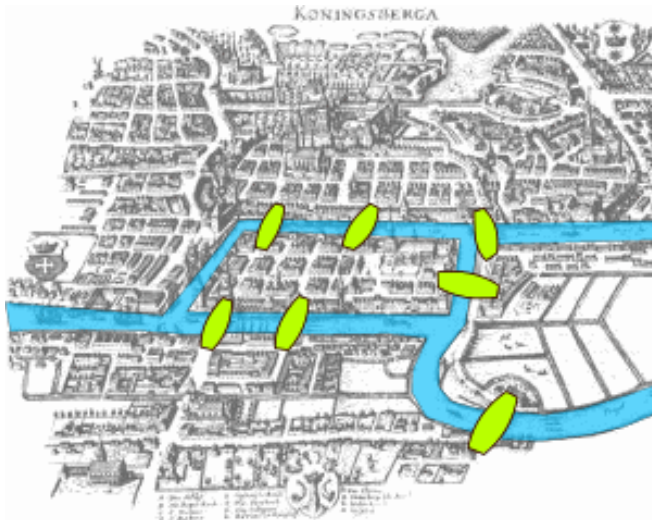
Sei $G = (E, K)$ ein Graph.

G heißt **zusammenhängend** $:\Leftrightarrow \forall e_1, e_2 \in E$: Es ex. ein Kantenzug, der e_1 und e_2 verbindet

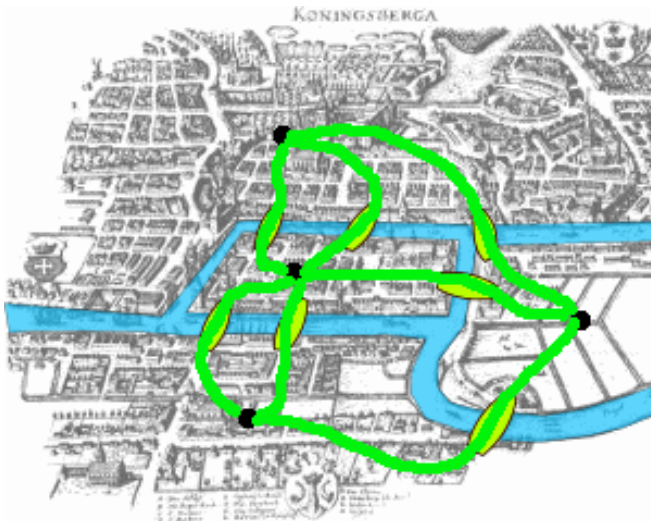




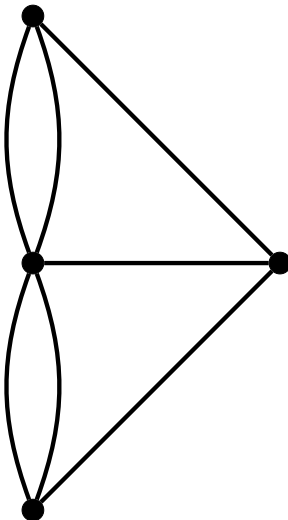
Königsberger Brückenproblem



Übersetzung in einen Graphen



Übersetzung in einen Graphen



Eulerscher Kreis

Sei G ein Graph und A ein Kreis in G .

A heißt **eulerscher Kreis** $:\Leftrightarrow \forall_{k \in K} : k \in A$.

Eulerscher Graph

Ein Graph heißt **eulersch**, wenn er einen eulerschen Kreis enthält.

Achtung

Verwechslungsgefahr: Hamiltonkreis \neq Eulerkreis

Hamiltonkreis

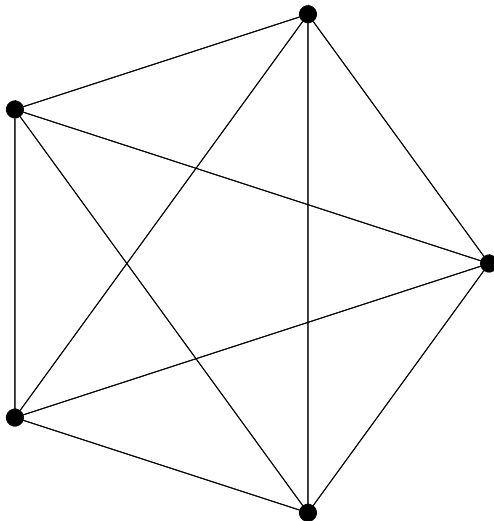
Sei G ein Graph und A ein Kreis in G .

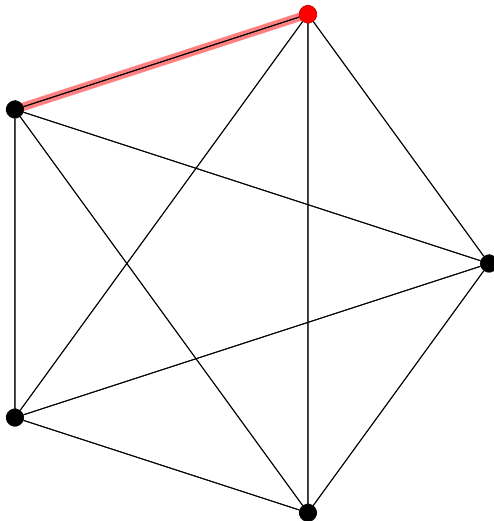
A heißt **Hamilton-Kreis** $:\Leftrightarrow \forall_{e \in E} : e \in A$.

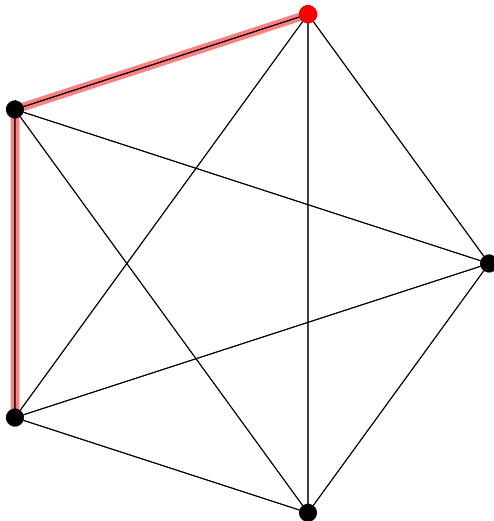
Eulerscher Kreis

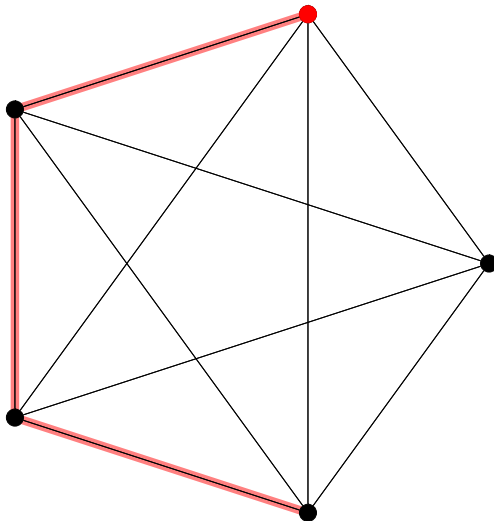
Sei G ein Graph und A ein Kreis in G .

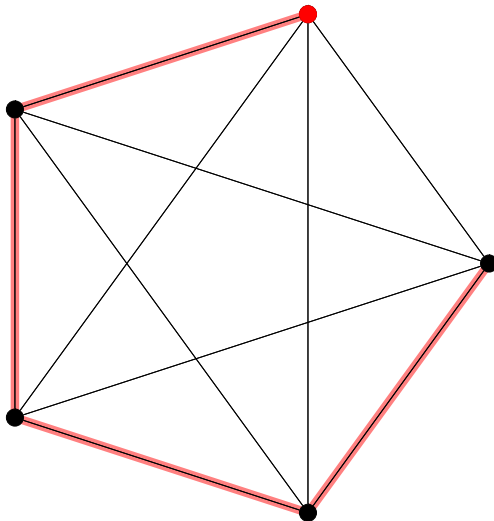
A heißt **eulerscher Kreis** $:\Leftrightarrow \forall_{k \in K} : k \in A$.

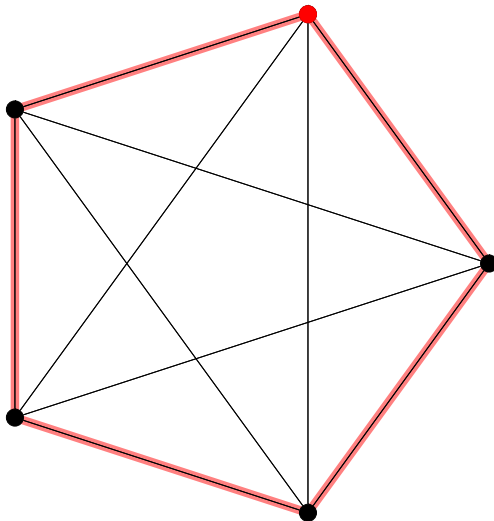


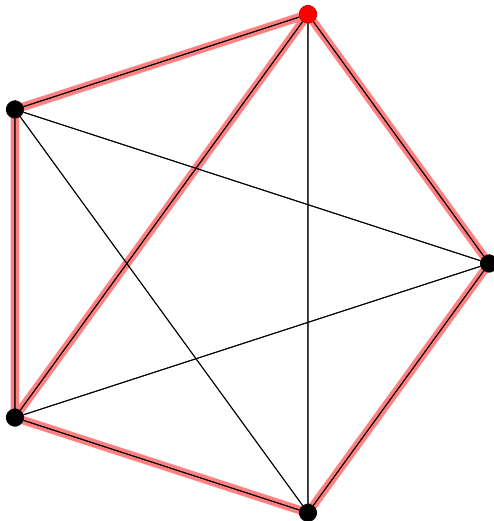


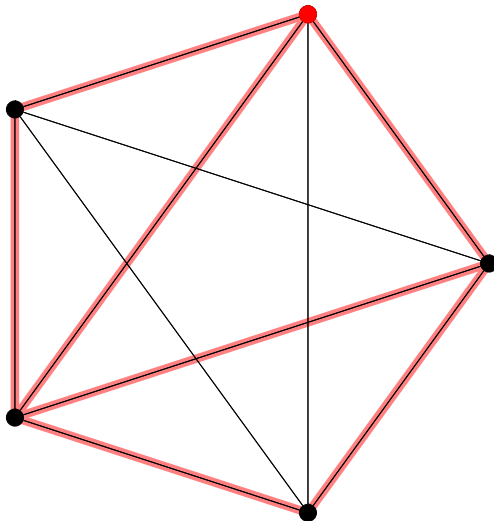


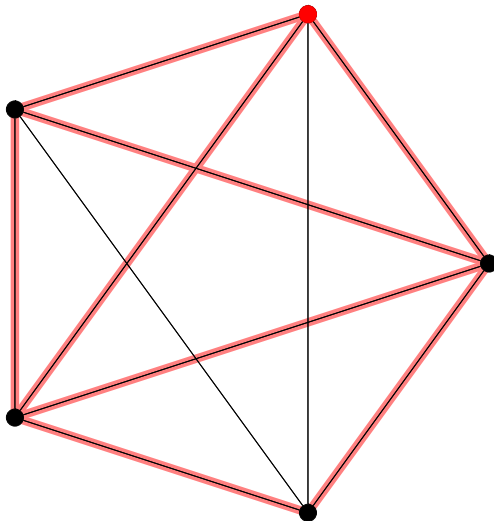


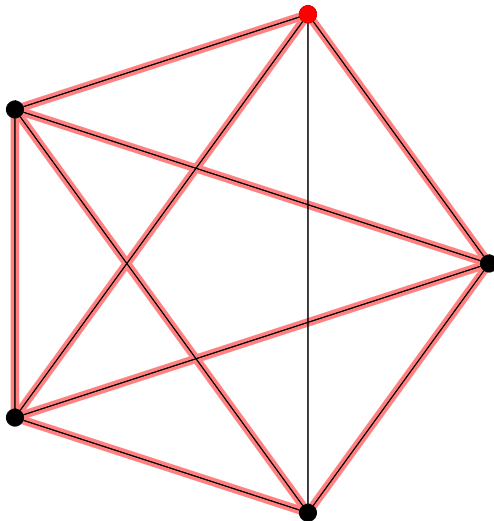


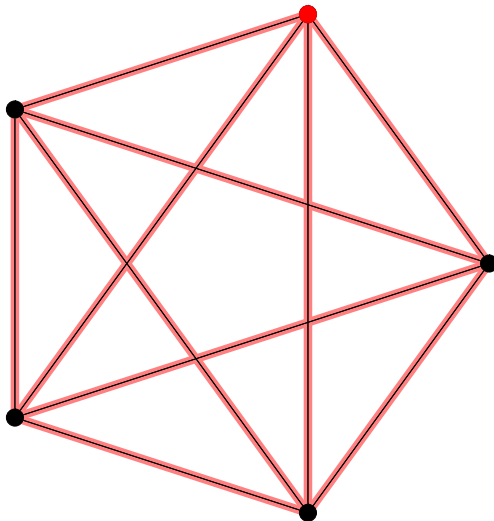




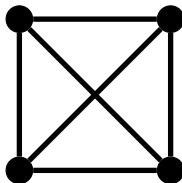




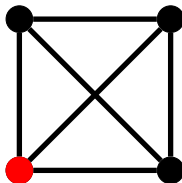




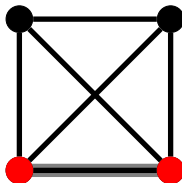
Hamilton-Kreis, kein EK



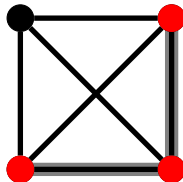
Hamilton-Kreis, kein EK



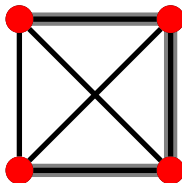
Hamilton-Kreis, kein EK



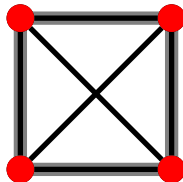
Hamilton-Kreis, kein EK



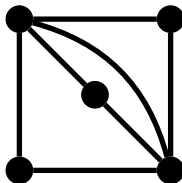
Hamilton-Kreis, kein EK



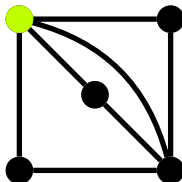
Hamilton-Kreis, kein EK



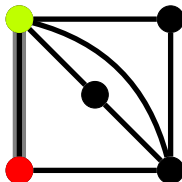
Eulerkreis, kein HK



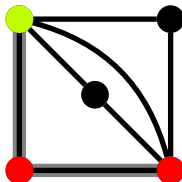
Eulerkreis, kein HK



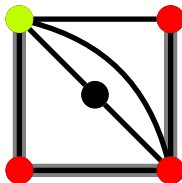
Eulerkreis, kein HK



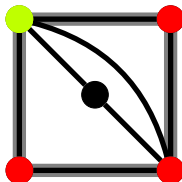
Eulerkreis, kein HK



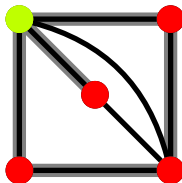
Eulerkreis, kein HK



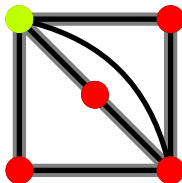
Eulerkreis, kein HK



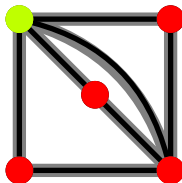
Eulerkreis, kein HK



Eulerkreis, kein HK



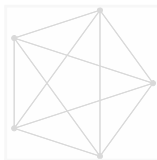
Eulerkreis, kein HK



Satz von Euler

Wenn ein Graph G eulersch ist, dann hat jede Ecke von G geraden Grad.

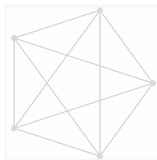
⇒ Wenn G eine Ecke mit ungeraden Grad hat, ist G nicht eulersch.



Satz von Euler

Wenn ein Graph G eulersch ist, dann hat jede Ecke von G geraden Grad.

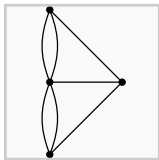
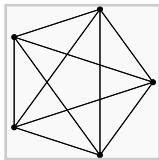
⇒ Wenn G eine Ecke mit ungeraden Grad hat, ist G nicht eulersch.



Satz von Euler

Wenn ein Graph G eulersch ist, dann hat jede Ecke von G geraden Grad.

⇒ Wenn G eine Ecke mit ungeraden Grad hat, ist G nicht eulersch.



Beh.: G ist eulersch $\Rightarrow \forall e \in E : \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

Bew.: Eulerkreis geht durch jede Ecke $e \in E$,
also geht der Eulerkreis (eventuell mehrfach) in e hinein und hinaus
 $\Rightarrow \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

Beh.: G ist eulersch $\Rightarrow \forall e \in E : \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

Bew.: Eulerkreis geht durch jede Ecke $e \in E$,

also geht der Eulerkreis (eventuell mehrfach) in e hinein und hinaus

$\Rightarrow \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

Beh.: G ist eulersch $\Rightarrow \forall e \in E : \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

Bew.: Eulerkreis geht durch jede Ecke $e \in E$,
also geht der Eulerkreis (eventuell mehrfach) in e hinein und hinaus
 $\Rightarrow \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

Beh.: G ist eulersch $\Rightarrow \forall e \in E : \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

Bew.: Eulerkreis geht durch jede Ecke $e \in E$,
also geht der Eulerkreis (eventuell mehrfach) in e hinein und hinaus
 $\Rightarrow \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. \Rightarrow Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xrightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G .

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. \Rightarrow Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xrightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G .

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. \Rightarrow Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xrightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G .

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. \Rightarrow Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xrightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G .

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. \Rightarrow Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xrightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G .

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. \Rightarrow Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xrightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G .

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. \Rightarrow Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xrightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G .

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. \Rightarrow Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xrightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G .

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. \Rightarrow Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xrightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G .

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis: Induktion über Anzahl m der Kanten

I.A.: $m = 0$: G ist eulersch. ✓

$m = 1$: Es gibt keinen Graphen in dem jede Ecke geraden Grad hat. ✓

$m = 2$: Nur ein Graph möglich. Dieser ist eulersch. ✓

I.V.: Sei $m \in \mathbb{N}_0$ beliebig, aber fest und es gelte: Für alle zusammenhängenden Graphen G mit höchstens m Kanten, bei denen jede Ecke geraden Grad hat, ist G eulersch.

I.S.: Sei $G = (E, K)$ mit $2 \leq m = |K|$. G ist zus. \Rightarrow Jede Ecke von G hat min. Grad 2. $\xrightarrow{A.5}$ Es gibt einen Kreis C in G .

...

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

...

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

⇒ Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in G^* haben geraden Grad

$\stackrel{IV}{\Rightarrow}$ Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise C_1, \dots, C_n

⇒ C_1, \dots, C_n können in C „eingehängt“ werden

⇒ G ist eulersch ⇒ Beh.

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

...

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

\Rightarrow Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in G^* haben geraden Grad

$\stackrel{IV}{\Rightarrow}$ Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise C_1, \dots, C_n

$\Rightarrow C_1, \dots, C_n$ können in C „eingehängt“ werden

$\Rightarrow G$ ist eulersch \Rightarrow Beh.

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

...

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

\Rightarrow Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in G^* haben geraden Grad

\xRightarrow{IV} Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise C_1, \dots, C_n

$\Rightarrow C_1, \dots, C_n$ können in C „eingehängt“ werden

$\Rightarrow G$ ist eulersch \Rightarrow Beh.

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

...

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

\Rightarrow Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in G^* haben geraden Grad

$\stackrel{IV}{\Rightarrow}$ Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise C_1, \dots, C_n

$\Rightarrow C_1, \dots, C_n$ können in C „eingehängt“ werden

$\Rightarrow G$ ist eulersch \Rightarrow Beh.

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

...

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

\Rightarrow Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in G^* haben geraden Grad

$\stackrel{IV}{\Rightarrow}$ Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise C_1, \dots, C_n

$\Rightarrow C_1, \dots, C_n$ können in C „eingehängt“ werden

$\Rightarrow G$ ist eulersch \Rightarrow Beh.

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

...

Sei

$$G_C = (E_C, K_C)$$

Graph zu Kreis C und

$$G^* = (E, K \setminus K_C).$$

\Rightarrow Alle Knoten jeder Zusammenhangskomponente in G^* haben geraden Grad

$\stackrel{IV}{\Rightarrow}$ Alle n Zhsgk. haben Eulerkreise C_1, \dots, C_n

$\Rightarrow C_1, \dots, C_n$ können in C „eingehängt“ werden

$\Rightarrow G$ ist eulersch \Rightarrow Beh.

Algorithmus 1 Algorithmus von Hierholzer

Require: $G = (E, K)$ ein eulerscher Graph.

$C \leftarrow$ leerer Kreis

repeat

$C_{\text{tmp}} \leftarrow$ ein beliebiger Kreis

▷ vgl. Aufgabe 5

$C \leftarrow C$ vereinigt mit C_{tmp}

 Entferne Kanten in C_{tmp} aus G

 Entferne isolierte Ecken

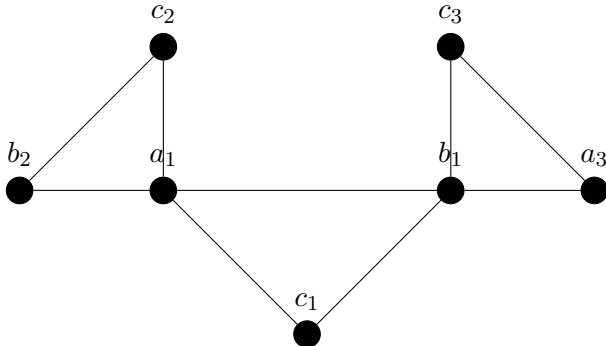
until C ist Eulerkreis

Ergebnis: Eulerkreis C

Sind Eulerkreise eindeutig?

Sind Eulerkreise bis auf Rotation und Symmetrie eindeutig?

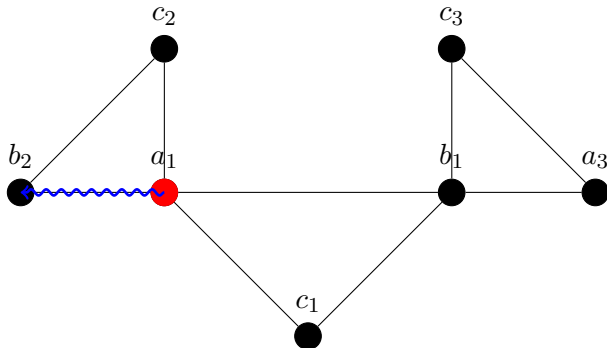
Sind Eulerkreise eindeutig?



im Allgemeinen nicht eindeutig

⇒ Eulerkreise sind

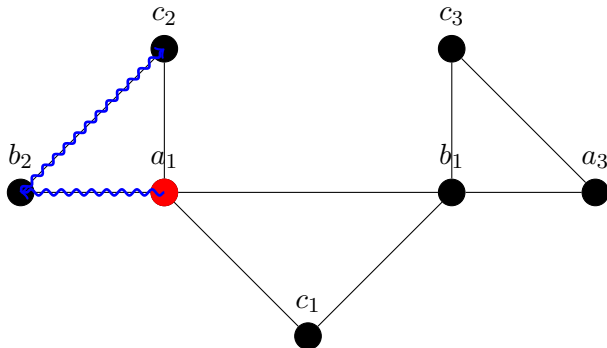
Sind Eulerkreise eindeutig?



im Allgemeinen nicht eindeutig

⇒ Eulerkreise sind

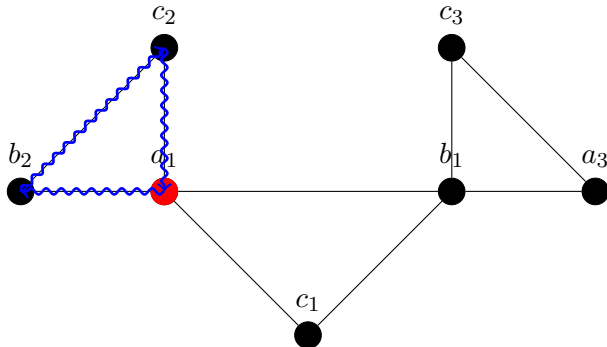
Sind Eulerkreise eindeutig?



im Allgemeinen nicht eindeutig

⇒ Eulerkreise sind

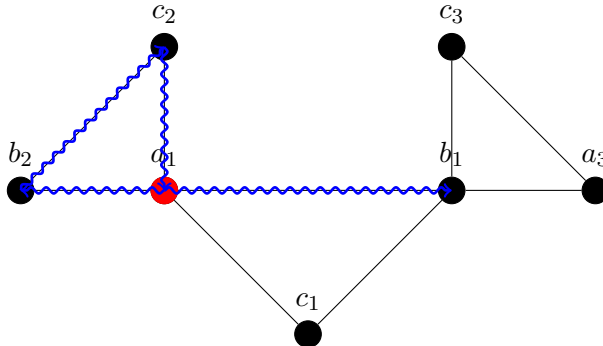
Sind Eulerkreise eindeutig?



im Allgemeinen nicht eindeutig

⇒ Eulerkreise sind

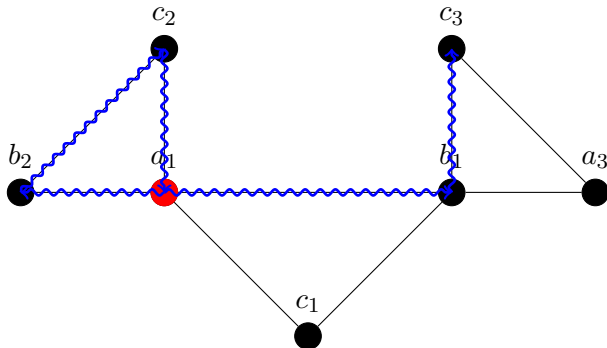
Sind Eulerkreise eindeutig?



im Allgemeinen nicht eindeutig

⇒ Eulerkreise sind

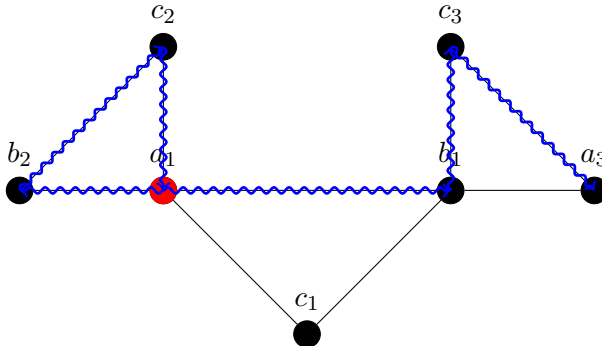
Sind Eulerkreise eindeutig?



im Allgemeinen nicht eindeutig

⇒ Eulerkreise sind

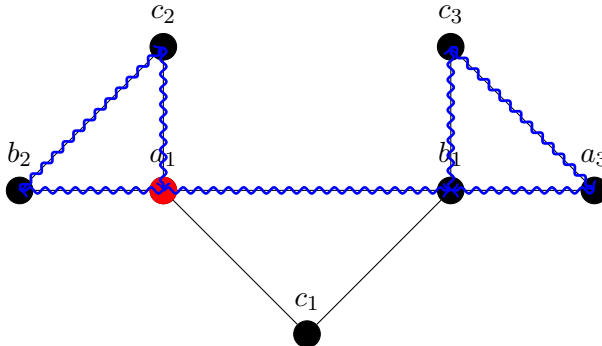
Sind Eulerkreise eindeutig?



im Allgemeinen nicht eindeutig

⇒ Eulerkreise sind

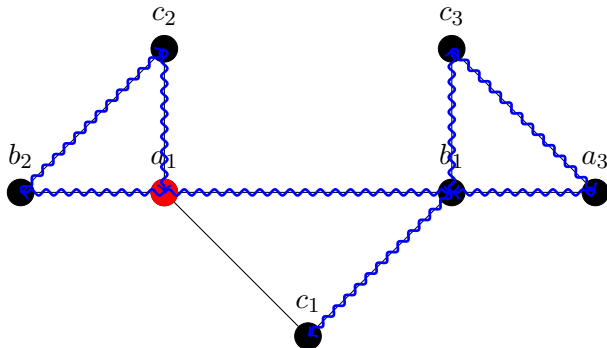
Sind Eulerkreise eindeutig?



im Allgemeinen nicht eindeutig

⇒ Eulerkreise sind

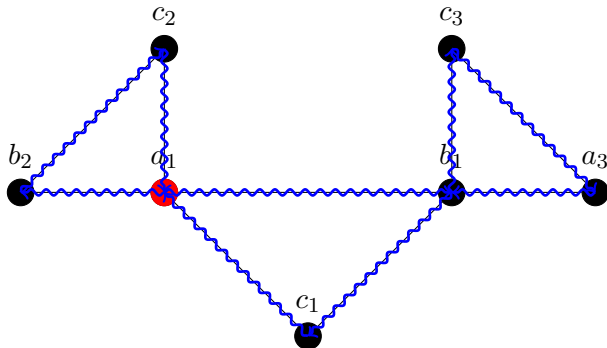
Sind Eulerkreise eindeutig?



im Allgemeinen nicht eindeutig

⇒ Eulerkreise sind

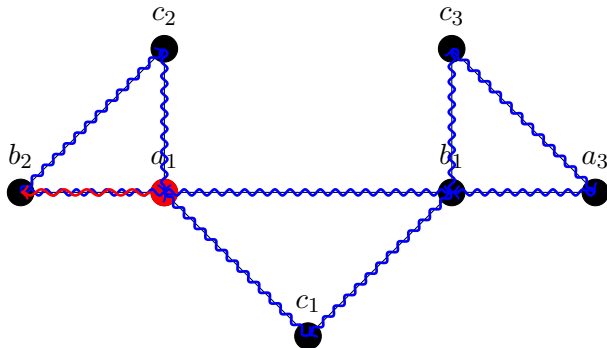
Sind Eulerkreise eindeutig?



⇒ Eulerkreise sind

im Allgemeinen nicht eindeutig

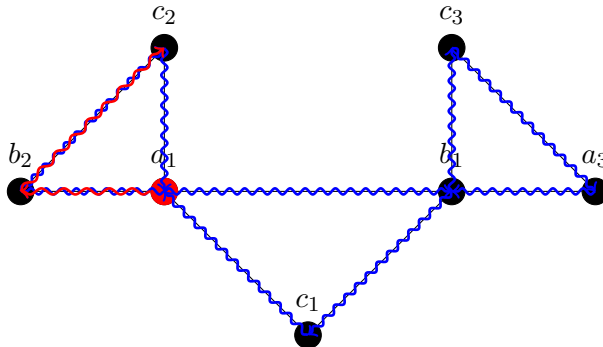
Sind Eulerkreise eindeutig?



⇒ Eulerkreise sind

im Allgemeinen nicht eindeutig

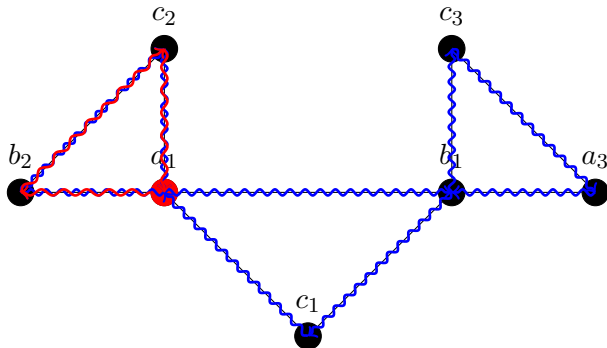
Sind Eulerkreise eindeutig?



⇒ Eulerkreise sind

im Allgemeinen nicht eindeutig

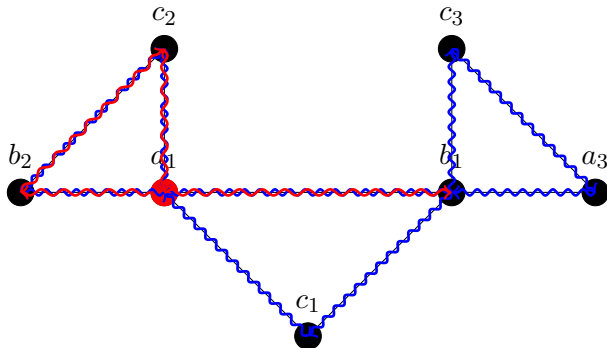
Sind Eulerkreise eindeutig?



⇒ Eulerkreise sind

im Allgemeinen nicht eindeutig

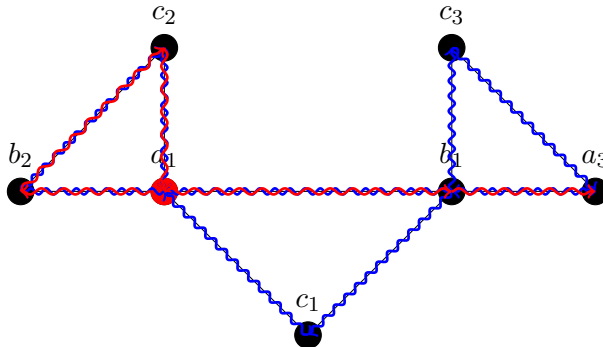
Sind Eulerkreise eindeutig?



⇒ Eulerkreise sind

im Allgemeinen nicht eindeutig

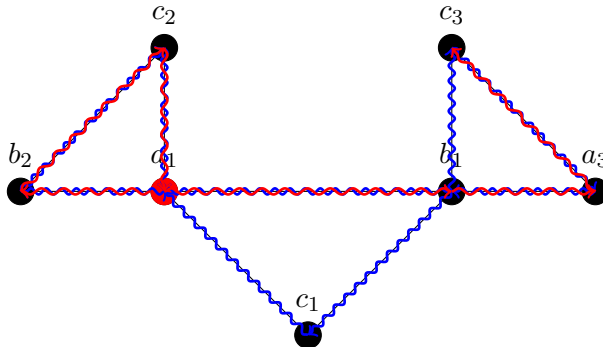
Sind Eulerkreise eindeutig?



⇒ Eulerkreise sind

im Allgemeinen nicht eindeutig

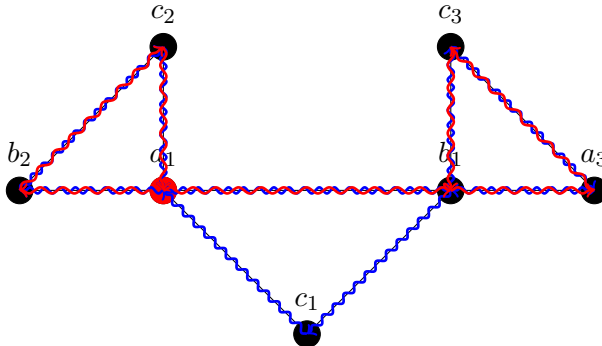
Sind Eulerkreise eindeutig?



⇒ Eulerkreise sind

im Allgemeinen nicht eindeutig

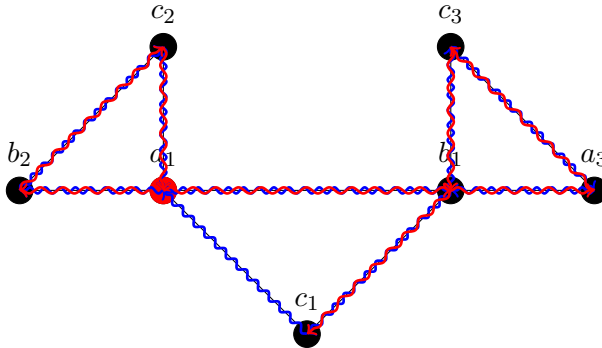
Sind Eulerkreise eindeutig?



⇒ Eulerkreise sind

im Allgemeinen nicht eindeutig

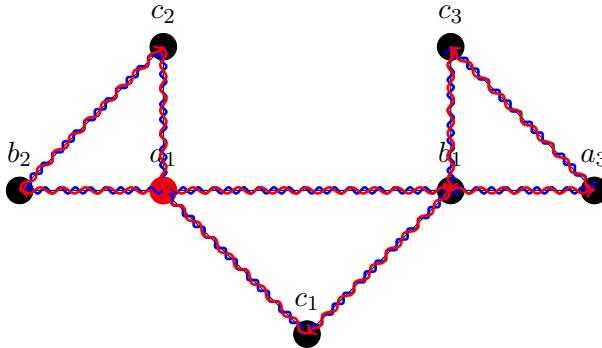
Sind Eulerkreise eindeutig?



⇒ Eulerkreise sind

im Allgemeinen nicht eindeutig

Sind Eulerkreise eindeutig?



⇒ Eulerkreise sind

im Allgemeinen nicht eindeutig

Offene eulersche Linie

Sei G ein Graph und A ein Weg, der kein Kreis ist.

A heißt **offene eulersche Linie** von G : \Leftrightarrow Jede Kante in G kommt genau ein mal in A vor.

Ein Graph kann genau dann „in einem Zug“ gezeichnet werden, wenn er eine offene eulersche Linie besitzt.

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „ \Rightarrow “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$. Es gibt einen

Eulerkreis in G^*

Satz von Euler

\Leftrightarrow In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

\Leftrightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s . ■

Rückrichtung analog

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „ \Rightarrow “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$. Es gibt einen

Eulerkreis in G^*

$\xLeftrightarrow{\text{Satz von Euler}}$

In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

\Leftrightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s . ■

Rückrichtung analog

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „ \Rightarrow “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$. Es gibt einen

Eulerkreis in G^*

$\xLeftrightarrow{\text{Satz von Euler}}$

In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

\Leftrightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s . ■

Rückrichtung analog

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „ \Rightarrow “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*

$\xLeftrightarrow{\text{Satz von Euler}}$ In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

\Leftrightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s . ■

Rückrichtung analog

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „ \Rightarrow “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$. Es gibt einen

Eulerkreis in G^*

$\xLeftrightarrow{\text{Satz von Euler}}$

In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

\Leftrightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s . ■

Rückrichtung analog

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „ \Rightarrow “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*

$\xLeftrightarrow{\text{Satz von Euler}}$ In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

\Leftrightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s . ■

Rückrichtung analog

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „ \Rightarrow “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*

$\xLeftrightarrow{\text{Satz von Euler}}$ In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

\Leftrightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s . ■

Rückrichtung analog

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „ \Rightarrow “

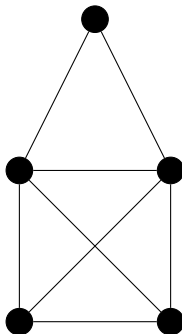
Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*

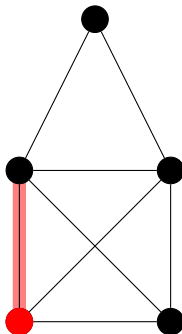
$\xLeftrightarrow{\text{Satz von Euler}}$ In G^* hat jede Ecke geraden Grad

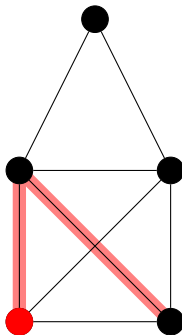
Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

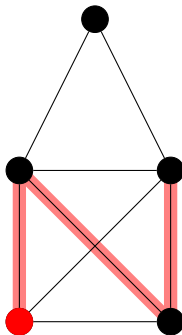
\Leftrightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad. Diese heißen e_0, e_s . ■

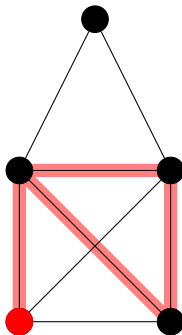
Rückrichtung analog

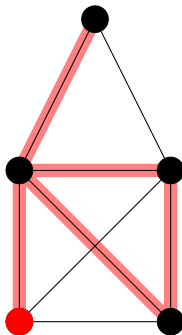


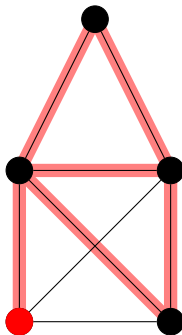


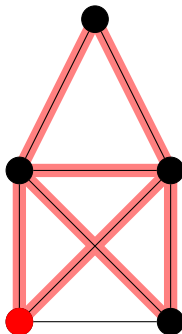


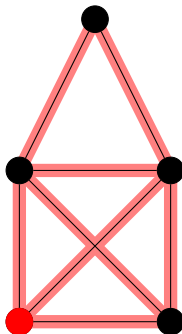










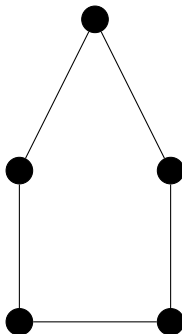


Aufgabe 3

Zeigen Sie: Ein Kreis ist genau dann bipartit, wenn er gerade Länge hat.

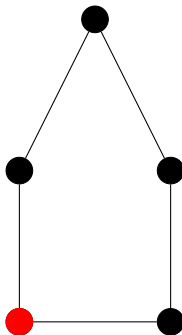
Aufgabe 3 - Lösung

Idee: Knoten abwechselnd färben



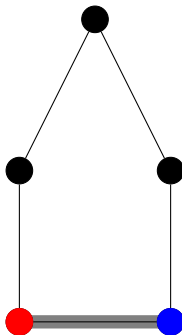
Aufgabe 3 - Lösung

Idee: Knoten abwechselnd färben



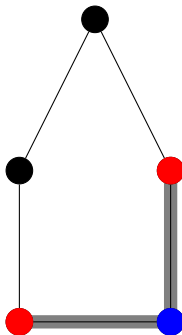
Aufgabe 3 - Lösung

Idee: Knoten abwechselnd färben



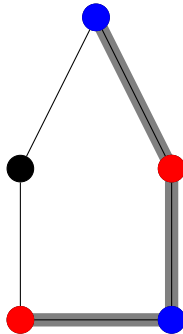
Aufgabe 3 - Lösung

Idee: Knoten abwechselnd färben



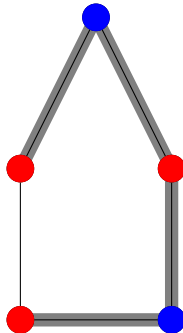
Aufgabe 3 - Lösung

Idee: Knoten abwechselnd färben



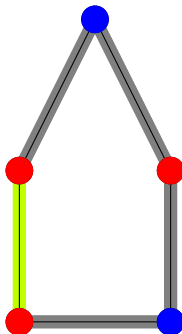
Aufgabe 3 - Lösung

Idee: Knoten abwechselnd färben



Aufgabe 3 - Lösung

Idee: Knoten abwechselnd färben



Zeigen Sie: Ein Graph G ist genau dann bipartit, wenn er nur Kreise gerade Länge hat.

Aufgabe 4: Lösung, Teil 1

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.

Beh.: G ist bipartit $\Rightarrow G$ hat keine Kreis ungerader Länge

Bew.: durch Widerspruch

Annahme: G hat Kreis ungerader Länge

$\xRightarrow{A.4}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit

\Rightarrow Widerspruch zu „ G ist bipartit“

$\Rightarrow G$ hat keinen Kreis ungerader Länge ■

Aufgabe 4: Lösung, Teil 1

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.

Beh.: G ist bipartit $\Rightarrow G$ hat keine Kreis ungerader Länge

Bew.: durch Widerspruch

Annahme: G hat Kreis ungerader Länge

$\xRightarrow{A.4}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit

\Rightarrow Widerspruch zu „ G ist bipartit“

$\Rightarrow G$ hat keinen Kreis ungerader Länge ■

Aufgabe 4: Lösung, Teil 1

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.

Beh.: G ist bipartit $\Rightarrow G$ hat keine Kreis ungerader Länge

Bew.: durch Widerspruch

Annahme: G hat Kreis ungerader Länge

$\xRightarrow{A.4}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit

\Rightarrow Widerspruch zu „ G ist bipartit“

$\Rightarrow G$ hat keinen Kreis ungerader Länge ■

Aufgabe 4: Lösung, Teil 1

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.

Beh.: G ist bipartit $\Rightarrow G$ hat keine Kreis ungerader Länge

Bew.: durch Widerspruch

Annahme: G hat Kreis ungerader Länge

$\xRightarrow{A.4}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit

\Rightarrow Widerspruch zu „ G ist bipartit“

$\Rightarrow G$ hat keinen Kreis ungerader Länge ■

Aufgabe 4: Lösung, Teil 1

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.

Beh.: G ist bipartit $\Rightarrow G$ hat keine Kreis ungerader Länge

Bew.: durch Widerspruch

Annahme: G hat Kreis ungerader Länge

$\xRightarrow{A.4}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit

\Rightarrow Widerspruch zu „ G ist bipartit“

$\Rightarrow G$ hat keinen Kreis ungerader Länge ■

Aufgabe 4: Lösung, Teil 1

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.

Beh.: G ist bipartit $\Rightarrow G$ hat keine Kreis ungerader Länge

Bew.: durch Widerspruch

Annahme: G hat Kreis ungerader Länge

$\xRightarrow{A.4}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit

\Rightarrow Widerspruch zu „ G ist bipartit“

$\Rightarrow G$ hat keinen Kreis ungerader Länge ■

Aufgabe 4: Lösung, Teil 1

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.

Beh.: G ist bipartit $\Rightarrow G$ hat keine Kreis ungerader Länge

Bew.: durch Widerspruch

Annahme: G hat Kreis ungerader Länge

$\xRightarrow{A.4}$ Ein Subgraph von G ist nicht bipartit

\Rightarrow Widerspruch zu „ G ist bipartit“

$\Rightarrow G$ hat keinen Kreis ungerader Länge ■

Aufgabe 4: Lösung, Teil 2

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.

Beh.: G hat keinen Kreis ungerader Länge $\Rightarrow G$ ist bipartit

Bew.: Konstruktiv

Färbe Graphen mit Breitensuche ■

Aufgabe 4: Lösung, Teil 2

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.

Beh.: G hat keinen Kreis ungerader Länge $\Rightarrow G$ ist bipartit

Bew.: Konstruktiv

Färbe Graphen mit Breitensuche ■

Aufgabe 4: Lösung, Teil 2

Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.

Beh.: G hat keinen Kreis ungerader Länge $\Rightarrow G$ ist bipartit

Bew.: Konstruktiv

Färbe Graphen mit Breitensuche ■

Aufgabe 4: Lösung, Teil 2

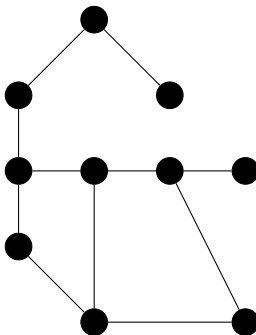
Vor.: Sei $G = (E, K)$ ein zus. Graph.

Beh.: G hat keinen Kreis ungerader Länge $\Rightarrow G$ ist bipartit

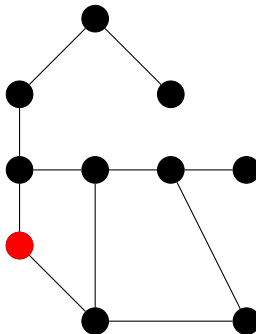
Bew.: Konstruktiv

Färbe Graphen mit Breitensuche ■

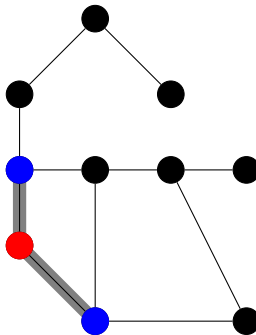
Aufgabe 4 - Beispiel



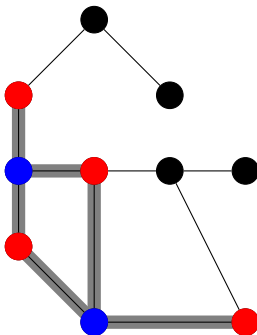
Aufgabe 4 - Beispiel



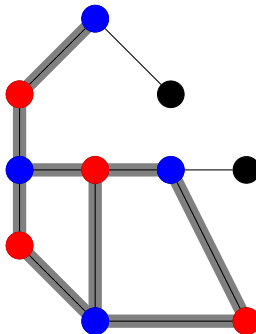
Aufgabe 4 - Beispiel



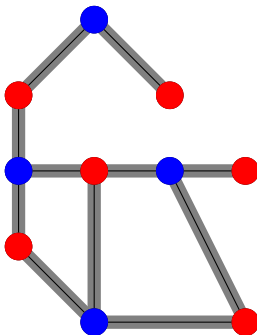
Aufgabe 4 - Beispiel



Aufgabe 4 - Beispiel

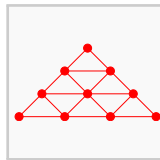
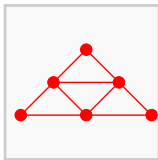
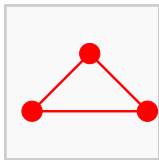


Aufgabe 4 - Beispiel

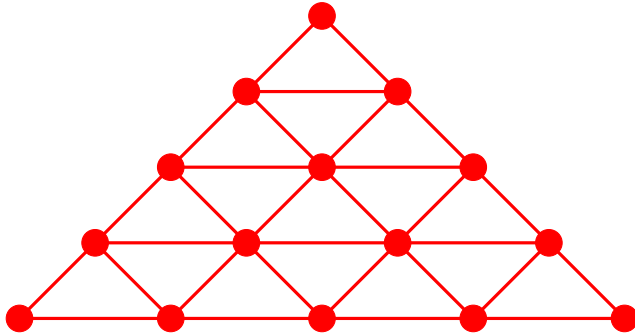


Aufgabe 9, Teil 1

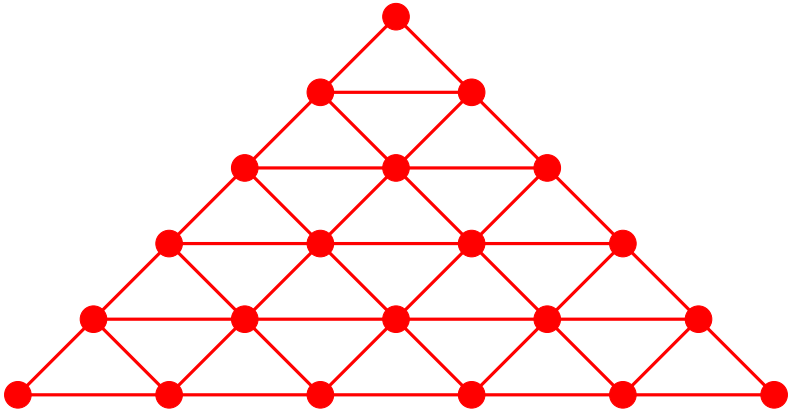
Im folgenden sind die ersten drei Graphen G_1, G_2, G_3 einer Folge (G_n) aus Graphen abgebildet. Wie sieht G_4 aus?



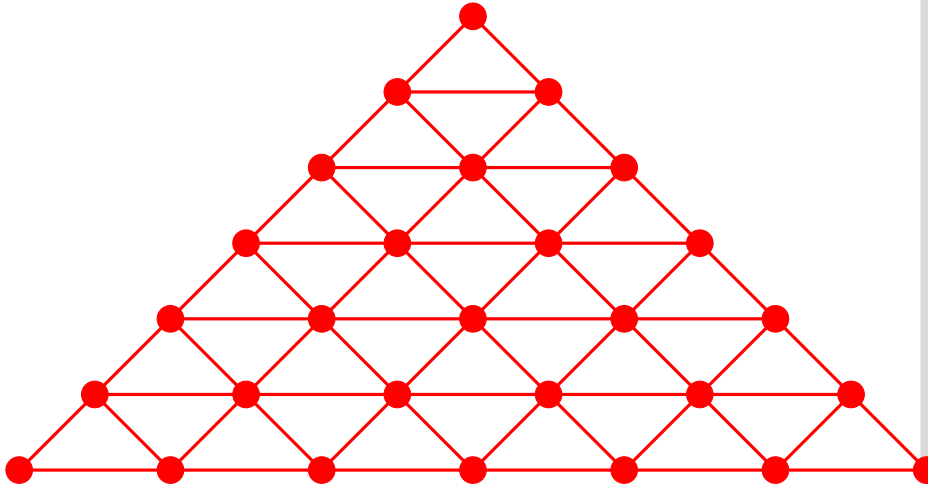
Aufgabe 9, Teil 1 (Lösung)



Aufgabe 9, Teil 1 (Lösung)

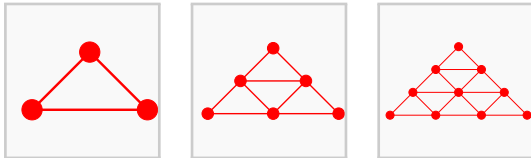


Aufgabe 9, Teil 1 (Lösung)



Aufgabe 9, Teil 2

Wie viele Ecken und wie viele Kanten hat G_i ?



Aufgabe 9, Teil 2: Antwort

Ecken:

$$|E_n| = |E_{n-1}| + (n+1) = \sum_{i=1}^{n+1} = \frac{n^2 + 2n + 2}{2}$$

Kanten:

$$|K_n| = |K_{n-1}| + \underbrace{((n+1) - 1) + 2}_{\text{außen}} + (n-1) \cdot 2 \quad (3)$$

$$= |K_{n-1}| + n + 2 + 2n - 2 \quad (4)$$

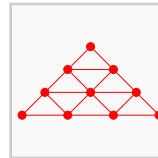
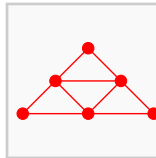
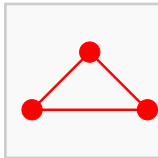
$$= |K_{n-1}| + 3n \quad (5)$$

$$= \sum_{i=1}^n 3i = 3 \sum_{i=1}^n i \quad (6)$$

$$= 3 \frac{n^2 + n}{2} \quad (7)$$

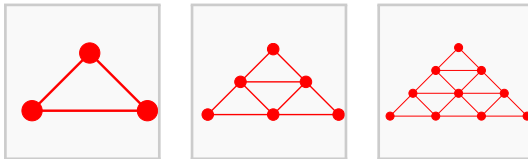
Aufgabe 9, Teil 3

Gebe G_i formal an.



Aufgabe 9, Teil 3 (Lösung)

Gebe G_n formal an.



$$E_n = \{ e_{x,y} \mid y \in 1, \dots, n; x \in y, \dots, 2 \cdot n - y \text{ mit } x - y \equiv 0 \pmod{2} \}$$

$$K_n = \left\{ \{ e_{x,y}, e_{i,j} \} \in E_n^2 \mid (x + 2 = i \wedge y = j) \vee (x + 1 = i \wedge y \pm 1 = j) \right\}$$

$$G_n = (E_n, K_n)$$

RECTANGLEFREECOLORING

Gegeben ist $n, m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und ein ungerichteter Graph $G = (E, K)$ mit

$$E = \{ e_{x,y} \mid 1 \leq x \leq n \} \wedge 1 \leq y \leq m$$

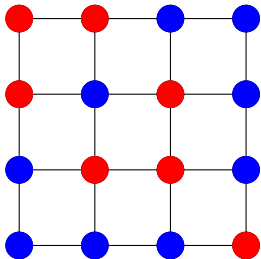
und

$$K = \{ k = \{ e_{x,y}, e_{x',y'} \} \in E \times E : |x - x'| + |y - y'| = 1 \}$$

Färbe die Ecken von G min einer minimalen Anzahl von Farben so, dass gilt:

$$\forall e_{x,y}, e_{x',y'} \in E : \neg(c(e_{x,y}) = c(e_{x',y'}) = c(e_{x',y}) = c(e_{x,y'}))$$

4×4 - Instanz:



- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Konigsberg_bridges.png
- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Unit_disk_graph.svg
- Google Maps (Grafiken ©2013 Cnes/Spot Image, DigitalGlobe)

- A. Beutelspacher: *Diskrete Mathematik für Einsteiger*, 4. Auflage, ISBN 978-3-8348-1248-3

Der Foliensatz und die \LaTeX und TikZ-Quellen sind unter
github.com/MartinThoma/LaTeX-examples/tree/master/presentations/Diskrete-Mathematik
Kurz-URL: goo.gl/uTgam