

# 1 Fragen zu Definitionen

## 1.) Definition topologischer Raum

### Definition 1

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar  $(X, \mathfrak{T})$  bestehend aus einer Menge  $X$  und  $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$  mit folgenden Eigenschaften

- (i)  $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$
- (ii) Sind  $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}$ , so ist  $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{T}$
- (iii) Ist  $I$  eine Menge und  $U_i \in \mathfrak{T}$  für jedes  $i \in I$ , so ist  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathfrak{T}$

Die Elemente von  $\mathfrak{T}$  heißen **offene Teilmengen** von  $X$ .

$A \subseteq X$  heißt **abgeschlossen**, wenn  $X \setminus A$  offen ist.

Ich glaube es ist unnötig in (i) zu fordern, dass  $\emptyset \in \mathfrak{T}$  gilt, da man das mit (iii) bereits abdeckt:

Sei in (iii) die Indexmenge  $I = \emptyset$ . Dann muss gelten:

$$\bigcup_{i \in \emptyset} U_i = \emptyset \in \mathfrak{T}$$

## 4.) Knotendiagramm:

### Definition 2

Ein **Knotendiagramm** eines Knotens  $\gamma$  ist eine Projektion  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow E$  auf eine Ebene  $E$ , sodass  $|\pi^{-1}(x) \cap C| \leq 2$  für jedes  $x \in D$ , wobei  $C = \gamma(S^1)$ .

Ist  $(\pi|C)^{-1}(x) = \{y_1, y_2\}$ , so **liegt**  $y_1$  **über**  $y_2$ , wenn  $(y_1 - x) = \lambda(y_2 - x)$  für ein  $\lambda > 1$  ist.

Sollte das jeweils  $\pi|_C$  (sprich: „ $\pi$  eingeschränkt auf  $C$ “) sein?

Was ist  $D$ ? Ich vermute, das sollte  $E$  sein.

Ich würde die Definition eher so schreiben:

### Definition 3

Sei  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$  ein Knoten,  $E$  eine Ebene und  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow E$  eine Projektion auf  $E$ .

$\pi$  heißt **Knotendiagramm** von  $\gamma$ , wenn gilt:

$$\left| (\pi|_{\gamma([0,1])})^{-1}(x) \right| \leq 2 \quad \forall x \in E$$

Ist  $(\pi|_{\gamma([0,1])})^{-1}(x) = \{y_1, y_2\}$ , so **liegt**  $y_1$  **über**  $y_2$ , wenn gilt:

$$\exists \lambda > 1 : (y_1 - x) = \lambda(y_2 - x)$$

Ist meine Definition äquivalent zu der aus der Vorlesung?

## 5.) Isotopie/Knoten

### Definition 4

Zwei Knoten  $\gamma_1, \gamma_2 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißen **äquivalent**, wenn es eine stetige Abbildung

$$H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

gibt mit

$$H(z, 0) = \gamma_1(z) \quad \forall z \in S^1$$

$$H(z, 1) = \gamma_2(z) \quad \forall z \in S^1$$

und für jedes feste  $t \in [0, 1]$  ist

$$H_z : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2, z \mapsto H(z, t)$$

ein Knoten. Die Abbildung  $H$  heißt **Isotopie** zwischen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ .

Fehlt hier nicht etwas wie „ $\forall z \in S^1$ “ (nun rot ergänzt).

## 6.) Basisbeispiele

- Kennst du ein Beispiel für eine Subbasis in einem Topologischen Raum, die zugleich eine Basis ist?
- Kennst du ein Beispiel für eine Subbasis in einem Topologischen Raum, die keine Basis ist?
- Kennst du ein Beispiel für eine Basis in einem Topologischen Raum, die keine Subbasis ist?

## 9.) Mannigfaltigkeit mit Rand

### Definition 5

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $n \in \mathbb{N}$ .

- a) Eine  $n$ -dimensionale **Karte** auf  $X$  ist ein Paar  $(U, \varphi)$ , wobei  $U \subseteq X$  offen und  $\varphi : U \rightarrow V$  Homöomorphismus von  $U$  auf eine offene Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$ .
- b) Ein  $n$ -dimensionaler **Atlas**  $\mathcal{A}$  auf  $X$  ist eine Familie  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  von Karten auf  $X$ , sodass  $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ .
- c)  $X$  heißt (topologische)  $n$ -dimensionale **Mannigfaltigkeit**, wenn  $X$  hausdorffsch ist, eine abzählbare Basis der Topologie hat und ein  $n$ -dimensionalen Atlas besitzt.

### Definition 6

Sei  $X$  ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis der Topologie.  $X$  heißt  $n$ -dimensionale **Mannigfaltigkeit mit Rand**, wenn es einen Atlas  $(U_i, \varphi_i)$  gibt, wobei  $U_i \subseteq X_i$  offen und  $\varphi_i$  ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge von

$$R_{+,0}^n := \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_m \geq 0 \}$$

ist.

Wieso wird bei der Mannigfaltigkeit mit Rand nicht gefordert, dass sie eine abzählbare Basis haben soll? Sollte man nicht vielleicht hinzufügen, dass der Atlas  $n$ -dimensional sein soll?

# 11.) Produkttopologie

## Definition 7

Seien  $X_1, X_2$  topologische Räume.

$U \subseteq X_1 \times X_2$  sei offen, wenn es zu jedem  $x = (x_1, x_2) \in U$  Umgebungen  $U_i$  um  $x_i$  mit  $i = 1, 2$  gibt, sodass  $U_1 \times U_2 \subseteq U$  gilt.

$\mathfrak{T} = \{ U \subseteq X_1 \times X_2 \mid U \text{ offen} \}$  ist eine Topologie auf  $X_1 \times X_2$ . Sie heißt **Produkttopologie**.  $\mathfrak{B} = \{ U_1 \times U_2 \mid U_i \text{ offen in } X_i, i = 1, 2 \}$  ist eine Basis von  $\mathfrak{T}$ .

Gibt es ein Beispiel, das zeigt, dass nicht  $\mathfrak{B} = \mathfrak{T}$  gilt?

# 12.) $\Delta^2$ explizit

Wie sieht der Standard-Simplex der dim. 2, also  $\Delta^2$ , explizit notiert aus?  
Praktisch ist das ja die konvexe Hülle der Standard-Basisvektoren  $e_0, e_1, e_2$

(also  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ), also ein Polyeder mit vier Flächen im  $\mathbb{R}^3$  (jedoch kein regelmäßiges Tetraeder, oder?)

Das ist dann nur das Gitter dieses Polyeders, aber nicht die Flächen oder sogar etwas innerhalb vom Polyeder, oder?

# 13.) Normalenvektor

## Definition 8

Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine durch Bogenlänge parametrisierte Kurve.

a) Für  $t \in I$  sei  $n(t)$  **Normalenvektor** an  $\gamma$  in  $t$ , d. h.

$$\langle n(t), \gamma'(t) \rangle = 0, \quad \|n(t)\| = 1$$

und  $\det((\gamma_1(t), n(t))) = +1$

b) Nach ?? sind  $n(t)$  und  $\gamma''(t)$  linear abhängig, d. h. es gibt  $\kappa(t) \in \mathbb{R}$  mit

$$\gamma''(t) = \kappa(t) \cdot n(t)$$

$\kappa(t)$  heißt **Krümmung** von  $\gamma$  in  $t$ .

### Definition 9

Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  eine durch Bogenlänge parametrisierte Kurve.

- a) Für  $t \in I$  heißt  $\kappa(t) := \|\gamma''(t)\|$  die **Krümmung** von  $\gamma$  in  $t$ .
- b) Ist für  $t \in I$  die Ableitung  $\gamma''(t) \neq 0$ , so heißt  $\gamma''(t)$  **Normalenvektor** an  $\gamma$  in  $t$ .
- c)  $b(t)$  sei ein Vektor, der  $\gamma'(t), n(t)$  zu einer orientierten Orthonormalbasis von  $\mathbb{R}^3$  ergänzt. Also gilt:

$$\det(\gamma'(t), n(t), b(t)) = 1$$

$b(t)$  heißt **Binormalenvektor**, die Orthonormalbasis

$$\{ \gamma'(t), n(t), b(t) \}$$

heißt **begleitendes Dreibein**.

Die beiden Definitionen eins Normalenvektors / der Krümmung scheinen mir äquivalent zu sein. Warum haben wir beide? Ich würde die zweite bevorzugen.

## 14.) Dimension von Simplizes

Gibt es 0-Dimensionale Simplizes?

## 15.) Existenz der Parallelen

### Definition 10

- §5) **Parallelenaxiom**: Für jedes  $g \in G$  und jedes  $P \in X \setminus g$  gibt es höchstens ein  $h \in G$  mit  $h \cap g = \emptyset$ .  $h$  heißt **Parallele zu  $g$  durch  $P$** .

Soll hier wirklich „mindestens“ stehen? Wie beweist man, dass es genau eine gibt?

## 1.1 15.) Simpliciale Abbildungen

Wenn man Simpliciale Abbildungen wie folgt definiert

### Definition 11

Seien  $K, L$  Simplicialkomplexe. Eine stetige Abbildung

$$f : |K| \rightarrow |L|$$

heißt **simplicial**, wenn für jedes  $\Delta \in K$  gilt:

- a)  $f(\Delta) \in L$
- b)  $f|_{\Delta} : \Delta \rightarrow f(\Delta)$  ist eine affine Abbildung.

dann ist die Forderung „ $f(\Delta) \in L$ “ doch immer erfüllt, oder? Gibt es eine Abbildung

$$f : |K| \rightarrow |L|$$

mit  $f(\Delta) \notin L$ ?

## 16.) ÜB 1, Aufgabe 2

Vor.: Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $A \subseteq X$ . Weiter bezeichne  $\mathfrak{T}$  die von  $d$  auf  $X$  erzeugte Topologie  $\mathfrak{T}'$ , die von der auf  $A \times A$  eingeschränkten Metrik  $d|_{A \times A}$  erzeugte Topologie.

Beh.: Die Topologie  $\mathfrak{T}'$  und  $\mathfrak{T}|_A$  (Spurtopologie) stimmen überein.

Bew.:

„ $\mathfrak{T}|_A \subseteq \mathfrak{T}'$ “:

Sei  $U \in \mathfrak{T}|_A = \{ V \cap A \mid V \in \mathfrak{T} \}$ .

Dann ex. also  $V \in \mathfrak{T}$  mit  $U = V \cap A$ .

Sei  $x \in U$ .

Da  $V \in \mathfrak{T}$ , ex. nach Bemerkung 3 ein  $r > 0$  mit

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_r(x) &:= \{ y \in X \mid d(x, y) < r \} \subseteq V \\ &\quad \{ y \in A \mid d(x, y) < r \} \subseteq V \cap A = U \end{aligned}$$

also ist  $U$  offen bzgl.  $d|_{A \times A}$ .

Wieso ist  $U$  offen bzgl.  $d|_{A \times A}$ ?

Da  $x \in U$  beliebig gewählt war gilt:  $\mathfrak{T}|_A \subseteq \mathfrak{T}'$