

## Aufgabe 1

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 14 \\ 3 & 14 & 34 \end{pmatrix}$$

**Aufgabe:** Durch Gauß-Elimination die Cholesky-Zerlegung  $A = \overline{L}L^T$  berechnen

**Lösung mit Gauß-Elimination:**

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 14 \\ 3 & 14 & 34 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \cdot (-2) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} \cdot (-3) \\ \\ \end{array} \\
 \rightsquigarrow L^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & A^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 8 & 25 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \cdot (-2) \\ \leftarrow + \\ \end{array} \\
 \rightsquigarrow L^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, & A^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \cdot (-2) \\ \leftarrow + \\ \end{array}
 \end{aligned}$$

TODO: Und wie gehts weiter?

**Lösung ohne Gauß-Elimination:**

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}}_{=:L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}_{=:L^T}$$

## Aufgabe 2

### Teilaufgabe i

Es gilt:

$$2x - e^{-x} = 0 \tag{1}$$

$$\Leftrightarrow 2x = e^{-x} \tag{2}$$

$$\tag{3}$$

Offensichtlich ist  $g(x) := 2x$  streng monoton steigend und  $h(x) := e^{-x}$  streng monoton fallend.

Nun gilt:  $g(0) = 0 < 1 = e^0 = h(0)$ . Das heißt, es gibt keinen Schnittpunkt für  $x \leq 0$ .

Außerdem:  $g(1) = 2$  und  $h(1) = e^{-1} = \frac{1}{e} < 2$ . Das heißt, für  $x \geq 1$  haben  $g$  und  $h$  keinen Schnittpunkt.

Da  $g$  und  $h$  auf  $[0, 1]$  stetig sind und  $g(0) < h(0)$  sowie  $g(1) > h(1)$  gilt, müssen sich  $g$  und  $h$  im Intervall mindestens ein mal schneiden. Da beide Funktionen streng monoton sind, schneiden sie sich genau ein mal.

Ein Schnittpunkt der Funktion  $g, h$  ist äquivalent zu einer Nullstelle der Funktion  $f$ . Also hat  $f$  genau eine Nullstelle und diese liegt in  $[0, 1]$ .

### Teilaufgabe ii

### Aufgabe 3

$f_i$	8	3	4	8
$x_i$	-1	0	1	3

#### Teilaufgabe i

$$p(x) = \sum_{i=0}^3 f_i \cdot L_i(x) \quad (4)$$

mit

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \dots = \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{-8} \quad (5)$$

$$L_1(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{3} \quad (6)$$

$$L_2(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{-4} \quad (7)$$

$$L_3(x) = \frac{x^3 - x}{24} \quad (8)$$

#### Teilaufgabe ii

Anordnung der dividierten Differenzen im so genannten Differenzenschema:

$$\begin{array}{llll} f[x_0] = f_0 = 8 & & & \\ f[x_1] = 3 & f[x_0, x_1] = \frac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_1} = -5 & & \\ f[x_2] = 4 & 1 & 3 & \\ f[x_3] = 8 & 2 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}$$

Also:

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1] \cdot (x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \quad (9)$$

$$+ f[x_0, x_1, x_2, x_3] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \quad (10)$$

$$= 8 - 5 \cdot (x - x_0) + 3 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \quad (11)$$

$$- \frac{2}{3} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \quad (12)$$

## **Aufgabe 4**

## **Aufgabe 5**