

# 1 Fragen zu Definitionen

## 1.1 Topologischer Raum

### Definition 1

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar  $(X, \mathfrak{T})$  bestehend aus einer Menge  $X$  und  $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$  mit folgenden Eigenschaften

- (i)  $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$
- (ii) Sind  $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}$ , so ist  $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{T}$
- (iii) Ist  $I$  eine Menge und  $U_i \in \mathfrak{T}$  für jedes  $i \in I$ , so ist  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathfrak{T}$

Die Elemente von  $\mathfrak{T}$  heißen **offene Teilmengen** von  $X$ .

$A \subseteq X$  heißt **abgeschlossen**, wenn  $X \setminus A$  offen ist.

Ich glaube es ist unnötig in (i) zu fordern, dass  $\emptyset \in \mathfrak{T}$  gilt, da man das mit (iii) bereits abdeckt:

Sei in (iii) die Indexmenge  $I = \emptyset$ . Dann muss gelten:

$$\bigcup_{i \in \emptyset} U_i = \emptyset \in \mathfrak{T}$$

## 1.2 Diskret

### Definition 2

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $M \subseteq X$ .

$M$  heißt **diskret** in  $X$ , wenn  $M$  in  $X$  keinen Häufungspunkt hat.

Laut [http://www.uni-protokolle.de/Lexikon/Diskreter\\_Raum.html#Diskrete\\_Teilmenge\\_eines\\_topologischen\\_Raums](http://www.uni-protokolle.de/Lexikon/Diskreter_Raum.html#Diskrete_Teilmenge_eines_topologischen_Raums) könnte man **diskret** wie folgt definieren:

### Definition 3

Sei  $X$  ein topologischer Raum.

- a) Ein Punkt  $x \in X$  heißt **isolierter Punkt**, wenn  $\{x\}$  offen ist.
- b) Ein topologischer Raum heißt **diskreter topologischer**, Raum wenn jeder seiner Punkte isoliert ist.

Sind diese beiden Definitionen äquivalent? Falls ja, finde ich die zweite besser. Da benötigt man den Begriff „Häufungspunkt“ nicht, den wir nicht definiert hatten.

## 1.3 Simpliciale Abbildung

### Definition 4

Seien  $K, L$  Simplicialkomplexe. Eine stetige Abbildung

$$f : |K| \rightarrow |L|$$

heißt **simplicial**, wenn für jedes  $\Delta \in K$  gilt:

- a)  $f(\Delta) \in L$
- b)  $f|_{\Delta} : \Delta \rightarrow f(\Delta)$  ist eine affine Abbildung.

Ist die Definition so richtig? Was bedeutet  $|K|$  und  $|L|$  in

$$f : |K| \rightarrow |L|$$

## 1.4 Knotendiagramm

### Definition 5

Ein **Knotendiagramm** eines Knotens  $\gamma$  ist eine Projektion  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow E$  auf eine Ebene  $E$ , sodass  $|(\pi|_C)^{-1}(x)| \leq 2$  für jedes  $x \in D$ .

Ist  $(\pi|_C)^{-1}(x) = \{y_1, y_2\}$ , so **liegt**  $y_1$  **über**  $y_2$ , wenn  $(y_1 - x) = \lambda(y_2 - x)$  für ein  $\lambda > 1$  ist.

Sollte das jeweils  $\pi|_C$  (sprich: „ $\pi$  eingeschränkt auf  $C$ “) sein? Was ist  $C$ ?

# 1.5 Homotope Abbildungen und äquivalente Knoten

## Definition 6

Zwei Knoten  $\gamma_1, \gamma_2 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißen **äquivalent**, wenn es eine stetige Abbildung

$$H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

gibt mit

$$H(z, 0) = \gamma_1(z)$$

$$H(z, 1) = \gamma_2(z)$$

und für jedes feste  $t \in [0, 1]$  ist

$$H_z : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2, z \mapsto H(z, t)$$

ein Knoten. Die Abbildung  $H$  heißt **Isotopie** zwischen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ .

Fehlt hier nicht etwas wie „ $\forall z \in S^1$ “?

## Definition 7

Seien  $X, Y$  topologische Räume,  $x_0 \in X, y_0 \in Y, f, g : X \rightarrow Y$  stetig mit  $f(x_0) = y_0 = g(x_0)$ .

$f$  und  $g$  heißen **homotop** ( $f \sim g$ ), wenn es eine stetige Abbildung  $H : X \times I \rightarrow Y$  mit

$$H(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in X$$

$$H(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X$$

$$H(x_0, s) = y_0 \quad \forall s \in I$$

gibt.

Mir scheint der Begriff „homotope Abbildung“ bis auf die Eigenschaft „ $H(x_0, s) = y_0 \quad \forall s \in I$ “ mit dem Begriff „äquivalente Knoten“ übereinzustimmen. Der Knoten-Begriff ist dafür etwas spezieller nur auf Knoten bezogen. Stimmt das?

## 1.6 Basis und Subbasis

- Kennst du ein Beispiel für eine Subbasis in einem Topologischen Raum, die zugleich eine Basis ist?

- Kennst du ein Beispiel für eine Subbasis in einem Topologischen Raum, die keine Basis ist?
- Kennst du ein Beispiel für eine Basis in einem Topologischen Raum, die keine Subbasis ist?

## 1.7 Homotopie

### Definition 8

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $a, b \in X$ ,  $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$  Wege von  $a$  nach  $b$ , d. h.  $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a$ ,  $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = b$

- a)  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  heißen **homotop**, wenn es eine stetige Abbildung  $H : I \times I \rightarrow X$  mit

$$H(t, 0) = \gamma_1(t) \quad \forall t \in [0, 1] =: I$$

$$H(t, 1) = \gamma_2(t) \quad \forall t \in [0, 1] =: I$$

und  $H(0, s) = a$  und  $H(1, s) = b$  für alle  $s \in I$  gibt. Dann schreibt man:  $\gamma_1 \sim \gamma_2$

$H$  heißt **Homotopie** zwischen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ .

- b)  $\gamma_s : I \rightarrow X$ ,  $\gamma_s(t) = H(t, s)$  ist Weg in  $X$  von  $a$  nach  $b$  für jedes  $s \in I$ .

Diese Definition finde ich seltsam. Sollte b) nicht eine Bedingung für „Homotopie“ sein? Falls nicht: Was wird in b) definiert?

## 1.8 Mannigfaltigkeit und MF mit Rand

### Definition 9

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $n \in \mathbb{N}$ .

- a) Eine  $n$ -dimensionale **Karte** auf  $X$  ist ein Paar  $(U, \varphi)$ , wobei  $U \subseteq X$  offen und  $\varphi : U \rightarrow V$  Homöomorphismus von  $U$  auf eine offene Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$ .
- b) Ein  $n$ -dimensionaler **Atlas**  $\mathcal{A}$  auf  $X$  ist eine Familie  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  von Karten auf  $X$ , sodass  $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ .

- c)  $X$  heißt (topologische)  $n$ -dimensionale **Mannigfaltigkeit**, wenn  $X$  hausdorffsch ist, eine abzählbare Basis der Topologie hat und ein  $n$ -dimensionalen Atlas besitzt.

### Definition 10

Sei  $X$  ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis der Topologie.  $X$  heißt  $n$ -dimensionale **Mannigfaltigkeit mit Rand**, wenn es einen Atlas  $(U_i, \varphi_i)$  gibt, wobei  $U_i \subseteq X_i$  offen und  $\varphi_i$  ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge von

$$R_{+,0}^n := \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_m \geq 0 \}$$

ist.

Wieso wird bei der Mannigfaltigkeit mit Rand nicht gefordert, dass sie eine abzählbare Basis haben soll? Sollte man nicht vielleicht hinzufügen, dass der Atlas  $n$ -dimensional sein soll?

## 1.9 Standard-Simplex

### Definition 11

- a) Sei  $\Delta^k = \text{conv}(e_0, \dots, e_k) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$  die konvexe Hülle der Standard-Basisvektoren  $e_0, \dots, e_k$ .

Dann heißt  $\Delta^k$  **Standard-Simplex** und  $k$  die Dimension des Simplex.

- b) Für Punkte  $v_0, \dots, v_k$  im  $\mathbb{R}^n$  in allgemeiner Lage heißt  $\Delta(v_0, \dots, v_k) = \text{conv}(v_0, \dots, v_k)$  ein  $k$ -**Simplex** in  $\mathbb{R}^n$ .

- c) Ist  $\Delta(v_0, \dots, v_k)$  ein  $k$ -Simplex und  $I = \{ i_0, \dots, i_r \} \subseteq \{ 0, \dots, k \}$ , so heißt  $s_{i_0, \dots, i_r} := \text{conv}(v_{i_0}, \dots, v_{i_r})$  **Teilsimplex** oder **Seite** von  $\Delta$ .

$s_{i_0, \dots, i_r}$  ist  $r$ -Simplex.

Kann man bei der Definition des Standard-Simplex  $k$  durch  $n$  ersetzen? Es gilt doch auf jeden Fall  $0 \leq k \leq n$ , oder? (Also auch für die anderen Definitionen).

## 1.10 Produkttopologie

### Definition 12

Seien  $X_1, X_2$  topologische Räume.

$U \subseteq X_1 \times X_2$  sei offen, wenn es zu jedem  $x = (x_1, x_2) \in U$  Umgebungen  $U_i$  um  $x_i$  mit  $i = 1, 2$  gibt, sodass  $U_1 \times U_2 \subseteq U$  gilt.

$\mathfrak{T} = \{ U \subseteq X_1 \times X_2 \mid U \text{ offen} \}$  ist eine Topologie auf  $X_1 \times X_2$ . Sie heißt **Produkttopologie**.  $\mathfrak{B} = \{ U_1 \times U_2 \mid U_i \text{ offen in } X_i, i = 1, 2 \}$  ist eine Basis von  $\mathfrak{T}$ .

Gibt es ein Beispiel, das zeigt, dass nicht  $\mathfrak{B} = \mathfrak{T}$  gilt?