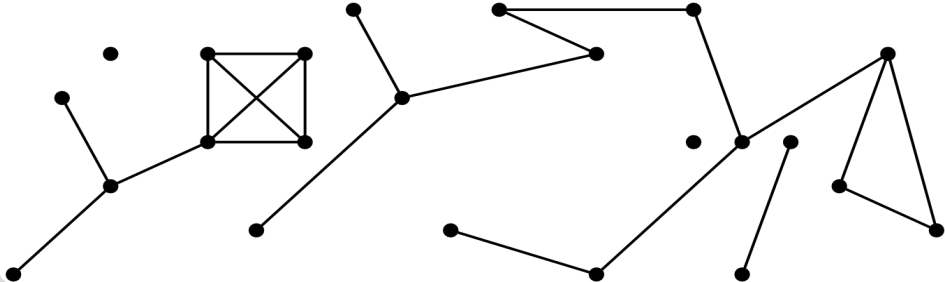


# Graphentheorie I

Martin Thoma | 2. Juli 2013

INSTITUT FÜR STOCHASTIK



## 1 Grundlagen

## 2 Königsberger Brückenproblem

## Graph

Ein Graph ist ein Tupel  $(V, E)$ , wobei  $V \neq \emptyset$  die Knotenmenge und  $E \subseteq V \times V$  die Kantenmenge bezeichnet.

TODO: 8 Bilder von Graphen

## Inzidenz

Sei  $v \in V$  und  $e = (v_1, v_2) \in E$ .

$v$  heißt **inzident** zu  $e : \Leftrightarrow v = v_1$  oder  $v = v_2$

TODO: 8 Bilder von Graphen

## Vollständiger Graph

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph.

$G$  heißt **vollständig**  $:\Leftrightarrow E = V \times V \setminus \{v \in V : \{v, v\}\}$

Ein vollständiger Graphen mit  $n$  Knoten wird als  $K_n$  bezeichnet.

TODO: 8 Bilder von Graphen TODO:  $K_1, K_2, \dots, K_8$

## Bipartite Graph

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und  $A, B \subset V$  zwei disjunkte Knotenmengen mit  $V \setminus A = B$ .

$G$  heißt **bipartit**

$:\Leftrightarrow \forall_{e=\{v_1, v_2\} \in E} : (v_1 \in A \text{ und } v_2 \in B) \text{ oder } (v_1 \in B \text{ und } v_2 \in A)$

TODO: 8 Bilder von Graphen

## Vollständig bipartite Graphen

Sei  $G = (V, E)$  ein bipartiter Graph und  $\{A, B\}$  bezeichne die Bipartition.

$G$  heißt **vollständig bipartit**  $\Leftrightarrow \forall a \in A \forall b \in B : \{a, b\} \in E$

TODO: 8 Bilder von Graphen

Bezeichnung: Vollständig bipartite Graphen mit der Bipartition  $\{ A, B \}$  bezeichnet man mit  $K_{|A|,|B|}$ .

TODO:  $K_{2,2}$  TODO:  $K_{2,3}$  TODO:  $K_{3,3}$



## Kantenzug

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph.

Dann heißt eine Folge  $e_1, e_2, \dots, e_s$  von Kanten, zu denen es Knoten  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_s$  gibt, so dass

- $e_1 = \{ v_0, v_1 \}$
- $e_2 = \{ v_1, v_2 \}$
- ...
- $e_s = \{ v_{s-1}, v_s \}$

gilt ein **Kantenzug**, der  $v_0$  und  $v_s$  **verbindet** und  $s$  seine **Länge**.

TODO: 8 Bilder

## Geschlossener Kantenzug

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und  $A = (e_1, e_2, \dots, e_s)$  ein Kantenzug.  
A heißt **geschlossen** : $\Leftrightarrow v_s = v_0$  .

TODO: 8 Bilder

## Weg

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und  $A = (e_1, e_2, \dots, e_s)$  ein Kantenzug.  
A heißt **Weg** :  $\Leftrightarrow \forall_{i,j \in [1,s] \cap \mathbb{N}} : i \neq j \Rightarrow e_i \neq e_j$ .

TODO: 8 Bilder

## Kreis

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph und  $A = (e_1, e_2 \dots, e_s)$  ein Kantenzug.  
A heißt **Kreis** : $\Leftrightarrow$  A ist geschlossen und ein Weg.

TODO: 8 Bilder

## Zusammenhängender Graph

Sei  $G = (V, E)$  ein Graph.

$G$  heißt **zusammenhängend**  $:\Leftrightarrow \forall v_1, v_2 \in V$  : Es ex. ein Kantenzug, der  $v_1$  und  $v_2$  verbindet

TODO: 8 Bilder

## Grad eines Knotens

Der **Grad** eines Knotens ist die Anzahl der Kanten, die von diesem Knoten ausgehen.

## Isolierte Knoten

Hat ein Knoten den Grad 0, so nennt man ihn **isoliert**.

TODO: 8 Bilder

TODO: Allgemeine Beschreibung

TODO: Übersetzung in Graph



## Eulerscher Kreis

Sei  $G$  ein Graph und  $A$  ein Kreis in  $G$ .

$A$  heißt **eulerscher Kreis**  $:\Leftrightarrow \forall_{e \in E} : e \in A$ .

## Eulerscher Graph

Ein Graph heißt **eulersch**, wenn er einen eulerschen Kreis enthält.

TODO:  $K_5$  eulerkreis animieren

## Satz von Euler

Wenn ein Graph  $G$  eulersch ist, dann hat jeder Knoten von  $G$  geraden Grad.

Wenn  $G$  einen Knoten mit ungeraden Grad hat, ist  $G$  nicht eulersch.

## Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen  $G$  jeder Knoten geraden Grad hat, dann ist  $G$  eulersch.

Beweis per Induktion

TODO

## Offene eulersche Linie

Sei  $G$  ein Graph und  $A$  ein Weg, der kein Kreis ist.

$A$  heißt **offene eulersche Linie** von  $G$  : $\Leftrightarrow$  Jede Kante in  $G$  kommt genau ein mal in  $A$  vor.

Ein Graph kann genau dann „in einem Zug“ gezeichnet werden, wenn er eine offene eulersche Linie besitzt.

## Satz 8.2.3

Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph.

$G$  hat eine offene eulersche Linie  $:\Leftrightarrow G$  hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

TODO: Haus des Nikolaus-Animation. TODO: Beweis