

# 1 Fragen zu Definitionen

## 6.) Basisbeispiele

Kennst du ein Beispiel für eine Subbasis in einem Topologischen Raum, die keine Basis ist?

Wie ist es mit folgendem?

Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum mit  $X = \{0, 1, 2\}$  und  $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{0\}, \{0, 1\}, X\}$ .  
Dann ist  $\mathcal{S} = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0, 2\}\}$  eine Subbasis von  $\mathfrak{T}$ , da gilt:

- $\emptyset \in \mathcal{S}$
- $\{0\} = \{0, 1\} \cap \{0, 2\}$
- $\{0, 1\} \in \mathcal{S}$
- $X = \{0, 1\} \cup \{0, 2\}$

Allerdings ist  $\mathcal{S}$  keine Basis von  $(X, \mathfrak{T})$ , da  $\{0\}$  nicht als Vereinigung von Elementen aus  $\mathcal{S}$  erzeugt werden kann.

## 9.) Mannigfaltigkeit mit Rand

### Definition 1

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $n \in \mathbb{N}$ .

- a) Eine  $n$ -dimensionale **Karte** auf  $X$  ist ein Paar  $(U, \varphi)$ , wobei  $U \subseteq X$  offen und  $\varphi : U \rightarrow V$  Homöomorphismus von  $U$  auf eine offene Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$ .
- b) Ein  $n$ -dimensionaler **Atlas**  $\mathcal{A}$  auf  $X$  ist eine Familie  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  von Karten auf  $X$ , sodass  $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ .

- c)  $X$  heißt (topologische)  $n$ -dimensionale **Mannigfaltigkeit**, wenn  $X$  hausdorffsch ist, eine abzählbare Basis der Topologie hat und ein  $n$ -dimensionalen Atlas besitzt.

## Definition 2

Sei  $X$  ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis der Topologie.  $X$  heißt  $n$ -dimensionale **Mannigfaltigkeit mit Rand**, wenn es einen Atlas  $(U_i, \varphi_i)$  gibt, wobei  $U_i \subseteq X_i$  offen und  $\varphi_i$  ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge von

$$R_{+,0}^n := \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_m \geq 0 \}$$

ist.

Sind Mannigfaltigkeiten mit Rand auch Mannigfaltigkeiten? Sollte das rote  $m$  eventuell  $n$  sein? Oder sollte es ein  $i$  sein, mit  $i = 1..n$ ?

Laut [https://de.wikipedia.org/wiki/Mannigfaltigkeit\\_mit\\_Rand](https://de.wikipedia.org/wiki/Mannigfaltigkeit_mit_Rand):

„Eine Mannigfaltigkeit mit Rand ist mathematisches Objekt aus der Differentialgeometrie. Es handelt sich hierbei nicht um einen Spezialfall einer Mannigfaltigkeit, sondern ganz im Gegenteil um eine Verallgemeinerung.“

Ist die Aussage auf Wikipedia korrekt? Für mich sieht das so aus, also ob folgende Definition auch richtig wäre:

## Definition 3

Sei  $X$  eine Mannigfaltigkeit mit Atlas  $\mathcal{A}$  und

$$\mathbb{R}_{+,0}^n := \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_m \geq 0 \}$$

$X$  heißt **Mannigfaltigkeit mit Rand**, wenn gilt:

$$\forall (U, \varphi) \in \mathcal{A} : \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}_{+,0}^n$$

# 11.) Produkttopologie

## Definition 4

Seien  $X_1, X_2$  topologische Räume.

$U \subseteq X_1 \times X_2$  sei offen, wenn es zu jedem  $x = (x_1, x_2) \in U$  Umgebungen  $U_i$  um  $x_i$  mit  $i = 1, 2$  gibt, sodass  $U_1 \times U_2 \subseteq U$  gilt.

$\mathfrak{T} = \{ U \subseteq X_1 \times X_2 \mid U \text{ offen} \}$  ist eine Topologie auf  $X_1 \times X_2$ . Sie heißt **Produkttopologie**.  $\mathfrak{B} = \{ U_1 \times U_2 \mid U_i \text{ offen in } X_i, i = 1, 2 \}$  ist eine Basis von  $\mathfrak{T}$ .

Gibt es ein Beispiel, das zeigt, dass nicht  $\mathfrak{B} = \mathfrak{T}$  gilt?

## 15.) Existenz der Parallelen

### Definition 5

§5) **Parallelenaxiom:** Für jedes  $g \in G$  und jedes  $P \in X \setminus g$  gibt es höchstens ein  $h \in G$  mit  $h \cap g = \emptyset$ .  $h$  heißt **Parallele zu  $g$  durch  $P$** .

Wie beweist man, dass es genau eine gibt? (Verschiebung der Geraden in den entsprechenden Punkt mit der Isometrie, die die Halbebenen gleich lässt)

## 17.) Simpliciale Abbildungen

Wenn man Simpliciale Abbildungen wie folgt definiert

### Definition 6

Seien  $K, L$  Simplicialkomplexe. Eine stetige Abbildung

$$f : |K| \rightarrow |L|$$

heißt **simplicial**, wenn für jedes  $\Delta \in K$  gilt:

a)  $f(\Delta) \in L$

b)  $f|_{\Delta} : \Delta \rightarrow f(\Delta)$  ist eine affine Abbildung.

Dann ist die Forderung „ $f(\Delta) \in L$ “ doch immer erfüllt, oder? Gibt es eine Abbildung  $f : |K| \rightarrow |L|$  mit  $f(\Delta) \notin L$ ?

## 18.) ÜB 1, Aufgabe 2

Vor.: Es sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum,  $A \subseteq X$ . Weiter bezeichne  $\mathfrak{T}$  die von  $d$  auf  $X$  erzeugte Topologie  $\mathfrak{T}'$ , die von der auf  $A \times A$  eingeschränkten Metrik  $d|_{A \times A}$  erzeugte Topologie.

Beh.: Die Topologie  $\mathfrak{T}'$  und  $\mathfrak{T}|_A$  (Spurtopologie) stimmen überein.

Bew.:

„ $\mathfrak{T}|_A \subseteq \mathfrak{T}'$ “:

Sei  $U \in \mathfrak{T}|_A = \{ V \cap A \mid V \in \mathfrak{T} \}$ .

Dann ex. also  $V \in \mathfrak{T}$  mit  $U = V \cap A$ .

Sei  $x \in U$ .

Da  $V \in \mathfrak{T}$ , ex. nach Bemerkung 3 ein  $r > 0$  mit

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_r(x) &:= \{ y \in X \mid d(x, y) < r \} \subseteq V \\ &\quad \{ y \in A \mid d(x, y) < r \} \subseteq V \cap A = U\end{aligned}$$

also ist  $U$  offen bzgl.  $d|_{A \times A}$ .

Wieso ist  $U$  offen bzgl.  $d|_{A \times A}$ ?

Da  $x \in U$  beliebig gewählt war gilt:  $\mathfrak{T}|_A \subseteq \mathfrak{T}'$

## 19.) Topologische Gruppe und stetige Gruppenoperation

### Definition 7

Sei  $G$  eine Mannigfaltigkeit und  $(G, \circ)$  eine Gruppe.

- a)  $G$  heißt **topologische Gruppe**, wenn die Abbildungen  $\circ : G \times G \rightarrow G$  und  $\iota : G \rightarrow G$  definiert durch

$$g \circ h := g \cdot h \text{ und } \iota(g) := g^{-1}$$

stetig sind.

- b) Ist  $G$  eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so heißt  $G$  **Lie-Gruppe**, wenn  $(G, \circ)$  und  $(G, \iota)$  differenzierbar sind.

### Definition 8

Sei  $G$  eine Gruppe,  $X$  ein topologischer Raum und  $\circ : G \times X \rightarrow X$  eine Gruppenoperation.

- a)  $G$  **operiert durch Homöomorphismen**, wenn für jedes  $g \in G$  die Abbildung

$$m_g : X \rightarrow X, x \mapsto g \circ x$$

ein Homöomorphismus ist.

- b) Ist  $G$  eine topologische Gruppe, so heißt die Gruppenoperation  $\circ$  **stetig**, wenn  $\circ : G \times X \rightarrow X$  stetig ist.

Wenn  $G$  eine topologische Gruppe ist, dann ist  $\circ$  doch auf jeden Fall stetig! Was soll die Definition? Des Weiteren verstehe ich  $g \circ h := g \cdot h$  nicht. Was ist  $\cdot$ ?

## 20.) Hyperbolische Metrik und Geraden

### Definition 9

Sei

$$\mathbb{H} := \{ z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0 \} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0 \}$$

die obere Halbebene bzw. Poincaré-Halbebene und  $G = G_1 \cup G_2$  mit

$$G_1 = \{ g_1 \subseteq \mathbb{H} \mid \exists m \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_{>0} : g_1 = \{ z \in \mathbb{H} : |z - m| = r \} \}$$

$$G_2 = \{ g_2 \subseteq \mathbb{H} \mid \exists x \in \mathbb{R} : g_2 = \{ z \in \mathbb{H} : \Re(z) = x \} \}$$

Die Elemente von  $\mathbb{H}$  heißen **hyperbolische Geraden**.

### Definition 10

Für  $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$  sei  $g_{z_1, z_2}$  die eindeutige hyperbolische Gerade durch  $z_1$  und  $z_2$  und  $a_1, a_2$  die „Schnittpunkte“ von  $g_{z_1, z_2}$  mit  $\mathbb{R} \cup \{ \infty \}$ .

Dann sei  $d(z_1, z_2) := \frac{1}{2} \ln |DV(a_1, z_4, a_2, z_2)|$  und heiße **hyperbolische Metrik**.

Wir haben hyperbolische Geraden mit der euklidischen Metrik beschrieben. Kann man hyperbolische Geraden auch mit der hyperbolischen Metrik beschreiben? Wie?

vgl. Beweis von Bemerkung 68 b)

## 21.) Definition Normalenvektor

### Definition 11

Sei  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine durch Bogenlänge parametrisierte Kurve.

a) Für  $t \in I$  sei  $n(t)$  **Normalenvektor** an  $\gamma$  in  $t$ , d. h.

$$\langle n(t), \gamma'(t) \rangle = 0, \quad \|n(t)\| = 1$$

und  $\det((\gamma_1(t), n(t))) = +1$ .

b) Nach ?? sind  $n(t)$  und  $\gamma''(t)$  linear abhängig, d. h. es gibt  $\kappa(t) \in \mathbb{R}$  mit

$$\gamma''(t) = \kappa(t) \cdot n(t)$$

$\kappa(t)$  heißt **Krümmung** von  $\gamma$  in  $t$ .

Sollte es in a)  $\det((\gamma_1'(t), n(t))) = +1$  sein?

## 22.) MF-Beispiel

$\mathcal{P}^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim = S^n/\sim$  und  $\mathcal{P}^n(\mathbb{C})$  sind Mannigfaltigkeiten der Dimension  $n$  bzw.  $2n$ , da gilt:

Sei  $U_i := \{ (x_0 : \dots : x_n) \in \mathcal{P}^n(\mathbb{R}) \mid x_i \neq 0 \} \ \forall i \in 0, \dots, n$ . Dann ist  $\mathcal{P}^n(\mathbb{R}) = \bigcup_{i=0}^n U_i$  und die Abbildung

$$\begin{aligned} U_i &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ (x_0 : \dots : x_n) &\mapsto \left( \frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \\ (y_1 : \dots : y_{i-1} : 1 : y_i : \dots : y_n) &\leftarrow (y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

ist bijektiv.

Was wird im Folgenden gemacht?

Die  $U_i$  mit  $i = 0, \dots, n$  bilden einen  $n$ -dimensionalen Atlas:

$$\begin{aligned} x = (1 : 0 : 0) \in U_0 &\rightarrow \mathbb{R}^2 & x &\mapsto (0, 0) \\ y = (0 : 1 : 1) \in U_2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 & y &\mapsto (0, 1) \end{aligned}$$

Umgebung:  $\mathfrak{B}_1(0, 1) \rightarrow \{ (1 : u : v) \mid \|(u, v)\| < 1 \} = V_1$

Umgebung:  $\mathfrak{B}_1(0, 1) \rightarrow \{ (w : z : 1) \mid w^2 + z^2 < 1 \} = V_2$

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$ ?

$$(a : b : c) \in V_1 \cap V_2$$

$$\Rightarrow a \neq 0 \text{ und } \left(\frac{b}{a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 < 1 \Rightarrow \frac{c}{a} < 1$$

$$\Rightarrow c \neq 0 \text{ und } \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 < 1 \Rightarrow \frac{a}{c} < 1$$

$\Rightarrow$  Widerspruch

## 23) Hyperbolische Geraden erfüllen 3.ii

### Bemerkung 1 (Eigenschaften der hyperbolischen Geraden)

Die hyperbolischen Geraden erfüllen das Anordnungsaxiom 3 ii

**Beweis:** Sei  $g \in G_1 \dot{\cup} G_2$  eine hyperbolische Gerade.

Fall 1:  $g = \{ z \in \mathbb{H} \mid |z - m| = r \} \in G_1$

Dann gilt:

$$\mathbb{H} = \underbrace{\{ z \in \mathbb{H} \mid |z - m| < r \}}_{=: H_1 \text{ (Kreisinneres)}} \dot{\cup} \underbrace{\{ z \in \mathbb{H} \mid |z - m| > r \}}_{=: H_2 \text{ (Kreisäußeres)}}$$

Da  $r > 0$  ist  $H_1$  nicht leer, da  $r \in \mathbb{R}$  ist  $H_2$  nicht leer.

Zu zeigen:  $\forall A \in H_i, B \in H_j$  mit  $i, j \in \{1, 2\}$  gilt:  $\overline{AB} \cap g \neq \emptyset \Leftrightarrow i \neq j$   
 „ $\Leftarrow$ “: Da  $d_{\mathbb{H}}$  stetig ist, folgt diese Richtung direkt. Alle Punkte in  $H_1$  haben einen Abstand von  $m$  der kleiner ist als  $r$  und alle Punkte in  $H_2$  haben einen Abstand von  $m$  der größer ist als  $r$ . Da man jede Strecke von  $A$  nach  $B$  insbesondere auch als stetige Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$  auffassen kann, greift der Zwischenwertsatz  $\Rightarrow \overline{AB} \cap g \neq \emptyset$

„ $\Rightarrow$ “:

TODO

Fall 2:  $g = \{ z \in \mathbb{H} \mid \Re z = x \} \in G_2$

Die disjunkte Zerlegung ist:

$$\mathbb{H} = \underbrace{\{ z \in \mathbb{H} \mid \Re(z) < x \}}_{=: H_1 \text{ (Links)}} \dot{\cup} \underbrace{\{ z \in \mathbb{H} \mid \Re(z) > x \}}_{=: H_2 \text{ (Rechts)}}$$

Zu zeigen:  $\forall A \in H_i, B \in H_j$  mit  $i, j \in \{1, 2\}$  gilt:  $\overline{AB} \cap g \neq \emptyset \Leftrightarrow i \neq j$   
 „ $\Leftarrow$ “: Wie zuvor mit dem Zwischenwertsatz.

„ $\Rightarrow$ “:

TODO

## 24) Tangentialebene

Erinnerung Sie sich an ?? „reguläre Fläche“.

Äquivalent dazu ist:  $S$  ist lokal von der Form

$$V(f) = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) = 0 \}$$

für eine  $C^\infty$ -Funktion  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ .