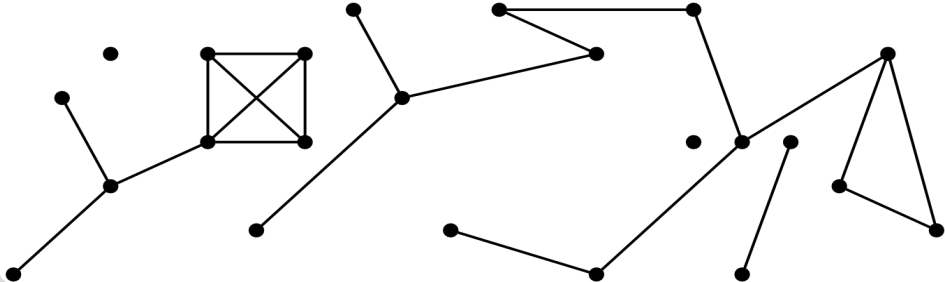


Graphentheorie I

Martin Thoma | 2. Juli 2013

INSTITUT FÜR STOCHASTIK

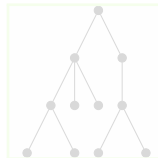
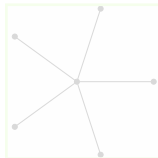
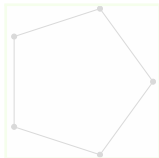
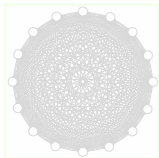
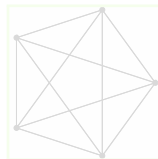
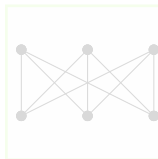


1 Grundlagen

2 Königsberger Brückenproblem

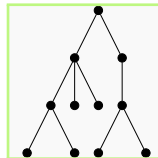
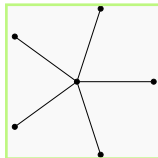
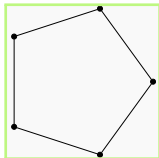
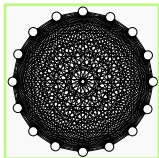
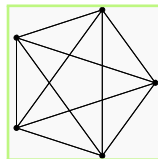
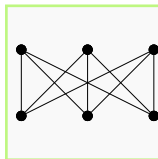
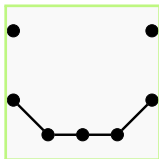
Graph

Ein Graph ist ein Tupel (E, K) , wobei $E \neq \emptyset$ die Eckenmenge und $K \subseteq E \times E$ die Kantenmenge bezeichnet.



Graph

Ein Graph ist ein Tupel (E, K) , wobei $E \neq \emptyset$ die Eckenmenge und $K \subseteq E \times E$ die Kantenmenge bezeichnet.

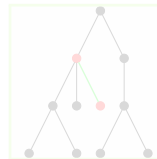
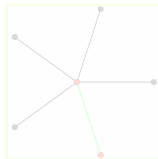
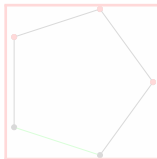
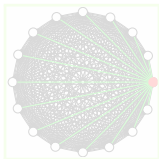
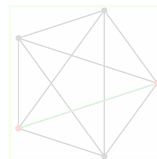
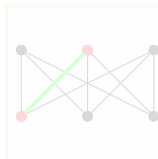
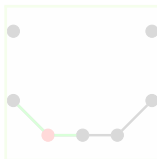


Knoten \Leftrightarrow Ecken

Inzidenz

Sei $e \in E$ und $k = \{v_1, v_2\} \in K$.

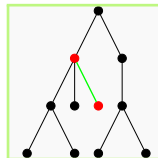
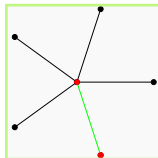
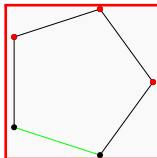
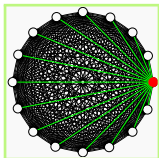
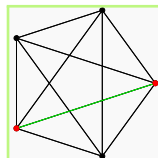
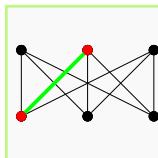
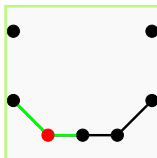
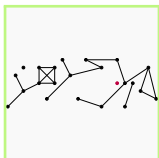
e heißt **inzident** zu $k : \Leftrightarrow e = e_1$ oder $e = e_2$



Inzidenz

Sei $e \in E$ und $k = \{v_1, v_2\} \in K$.

e heißt **inzident** zu $k : \Leftrightarrow e = e_1$ oder $e = e_2$

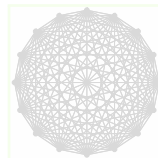
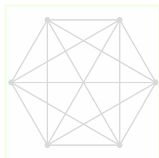
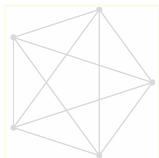
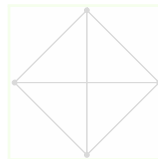
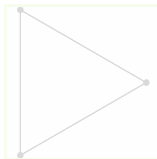
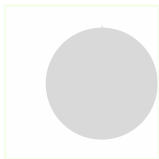


Vollständiger Graph

Sei $G = (E, K)$ ein Graph.

G heißt **vollständig** $:\Leftrightarrow E \times E \setminus \{e \in E : \{e, e\}\}$

Ein vollständiger Graph mit n Ecken wird als K_n bezeichnet.

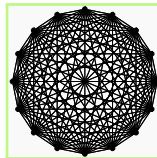
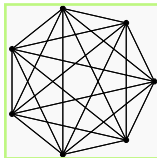
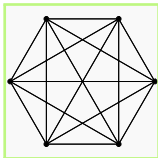
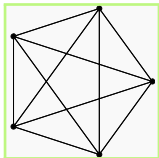
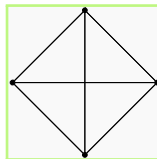
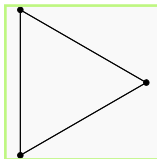
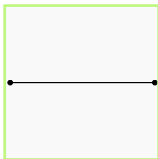
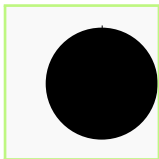


Vollständiger Graph

Sei $G = (E, K)$ ein Graph.

G heißt **vollständig** : \Leftrightarrow $E \times E \setminus \{e \in E : \{e, e\}\}$

Ein vollständiger Graph mit n Ecken wird als K_n bezeichnet.



Bipartite Graph

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A, B \subset V$ zwei disjunkte Eckenmengen mit $E \setminus A = B$.

G heißt **bipartit**

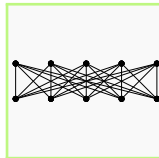
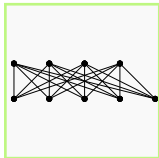
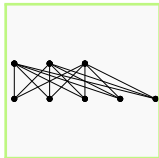
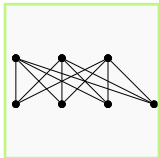
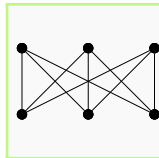
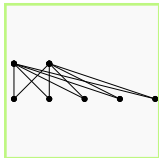
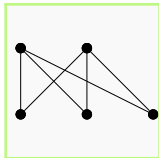
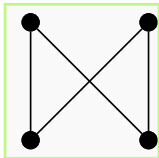
$:\Leftrightarrow \forall_{k=\{e_1, e_2\} \in K} : (e_1 \in A \text{ und } e_2 \in B) \text{ oder } (e_1 \in B \text{ und } e_2 \in A)$

TODO: 8 Bilder von Graphen

Vollständig bipartite Graphen

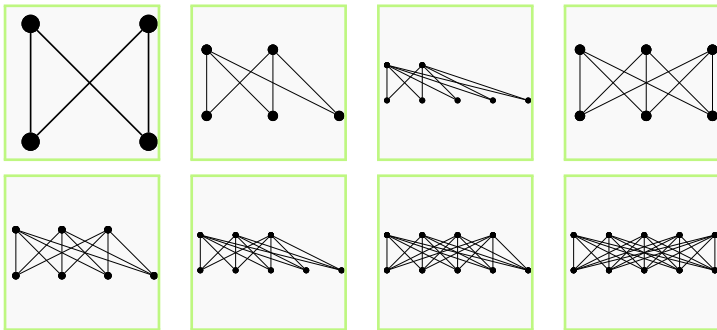
Sei $G = (E, K)$ ein bipartiter Graph und $\{A, B\}$ bezeichne die Bipartition.

G heißt **vollständig bipartit** $\Leftrightarrow \forall_{a \in A} \forall_{b \in B} : \{a, b\} \in K$



Vollständig bipartite Graphen

Bezeichnung: Vollständig bipartite Graphen mit der Bipartition $\{A, B\}$ bezeichnet man mit $K_{|A|,|B|}$.



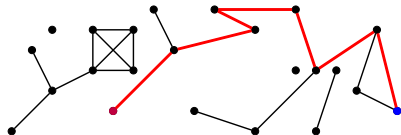
Kantenzug

Sei $G = (E, K)$ ein Graph.

Dann heißt eine Folge k_1, k_2, \dots, k_s von Kanten, zu denen es Ecken $e_0, e_1, e_2, \dots, e_s$ gibt, so dass

- $k_1 = \{ e_0, e_1 \}$
- $k_2 = \{ e_1, e_2 \}$
- ...
- $k_s = \{ e_{s-1}, e_s \}$

gilt ein **Kantenzug**, der e_0 und e_s **verbindet** und s seine **Länge**.



Geschlossener Kantenzug

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $A = (e_1, e_2, \dots, e_s)$ ein Kantenzug.
A heißt **geschlossen** : $\Leftrightarrow v_s = v_0$.

TODO: 8 Bilder

Weg

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $A = (e_1, e_2, \dots, e_s)$ ein Kantenzug.
A heißt **Weg** : $\Leftrightarrow \forall_{i,j \in [1,s] \cap \mathbb{N}} : i \neq j \Rightarrow e_i \neq e_j$.

TODO: 8 Bilder

Kreis

Sei $G = (V, E)$ ein Graph und $A = (e_1, e_2, \dots, e_s)$ ein Kantenzug.
A heißt **Kreis** : \Leftrightarrow A ist geschlossen und ein Weg.

TODO: 8 Bilder

Zusammenhängender Graph

Sei $G = (V, E)$ ein Graph.

G heißt **zusammenhängend** $:\Leftrightarrow \forall v_1, v_2 \in V$: Es ex. ein Kantenzug, der v_1 und v_2 verbindet

TODO: 8 Bilder

Grad einer Ecke

Der **Grad** einer Ecke ist die Anzahl der Kanten, die von dieser Ecke ausgehen.

Isolierte Ecken

Hat eine Ecke den Grad 0, so nennt man ihn **isoliert**.

TODO: 8 Bilder

TODO: Allgemeine Beschreibung

TODO: Übersetzung in Graph

Eulerscher Kreis

Sei G ein Graph und A ein Kreis in G .

A heißt **eulerscher Kreis** $:\Leftrightarrow \forall_{e \in E} : e \in A$.

Eulerscher Graph

Ein Graph heißt **eulersch**, wenn er einen eulerschen Kreis enthält.

TODO: K_5 eulerkreis animieren

Satz von Euler

Wenn ein Graph G eulersch ist, dann hat jeder Knoten von G geraden Grad.

Wenn G einen Knoten mit ungeraden Grad hat, ist G nicht eulersch.

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jeder Knoten geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis per Induktion

TODO

Offene eulersche Linie

Sei G ein Graph und A ein Weg, der kein Kreis ist.

A heißt **offene eulersche Linie** von G : \Leftrightarrow Jede Kante in G kommt genau ein mal in A vor.

Ein Graph kann genau dann „in einem Zug“ gezeichnet werden, wenn er eine offene eulersche Linie besitzt.

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

TODO: Haus des Nikolaus-Animation. TODO: Beweis