

Aufgabe 1

Teilaufgabe a)

Gegeben: Sei $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$.

Gesucht: Cholesky-Zerlegung $A = L \cdot L^T$

Rechnung: Erste Spalte:

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} \quad (1)$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} \quad (2)$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} \quad (3)$$

(4)

Zweite Spalte:

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} \quad (5)$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{21} \cdot l_{31}}{l_{22}} \quad (6)$$

(7)

Dritte Spalte:

$$l_{33} = \sqrt{a_{33} - l_{32}^2 - l_{31}^2} \quad (8)$$

Teilaufgabe b)

$$l_{11} = 2 \quad (9)$$

$$l_{21} = 1 \quad (10)$$

$$l_{31} = -2 \quad (11)$$

$$l_{22} = 3 \quad (12)$$

$$l_{32} = 1 \quad (13)$$

$$l_{33} = 1 \quad (14)$$

(15)

Die restlichen Einträge sind 0. (L ist immer eine untere Dreiecksmatrix)

Teilaufgabe c)

$$A \cdot x = b \Leftrightarrow L \cdot L^T \cdot x = b \quad (16)$$

$$L \cdot c = b \quad (17)$$

Löse 17 mit Vorwärtssubstitution.

$$L^T \cdot x = c \quad (18)$$

Löse 18 mit Rückwärtssubstitution.

$$x_3 = 3 \quad (19)$$

$$x_2 = 1 \quad (20)$$

$$x_1 = 2 \quad (21)$$

Aufgabe 2**Teilaufgabe a)**

$$r_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot r_{kj} \quad (22)$$

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} \cdot r_{kj}}{r_{jj}} \quad (23)$$

```

for  $d \in \{1, \dots, n\}$  do
  berechne d-te Zeile von  $R$ 
  berechne d-te Spalte von  $L$ 
end for

```

Aufgabe 3**Teilaufgabe a)**

1. Selbstabbildung:

Sei $x \in D := [1.75, 2] = [\frac{7}{4}, \frac{8}{4}]$.

Dann:

$$F(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \leq 1 + \frac{1}{1.75} + \frac{1}{1.75^2} = 1 + \frac{44}{49} \leq 2 \quad (24)$$

und:

$$F(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1.75 \quad (25)$$

2. Abgeschlossenheit: D ist offensichtlich abgeschlossen.

3. Kontraktion:

Hier ist der Mittelwertsatz der Differentialrechnung von Nutzen.

F ist Lipschitz-stetig auf D und für alle $x \in D$ gilt:

$$|F'(x)| = \left| -\frac{1}{x^2} - 2 \cdot \frac{1}{x^3} \right| \leq \frac{240}{343} =: \theta < 1 \quad (26)$$

Also gilt auch $\forall x, y \in D$:

$$|F(x) - F(y)| \leq \theta \cdot |x - y| \quad (27)$$

Somit ist die Lipschitz- bzw. Kontraktions-Konstante θ .

Insgesamt folgt, dass F die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

Aufgabe 4

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{1}{1+4x} dx \\ &= \int_0^{0.5} \frac{1}{1+4x} dx + \int_{0.5}^1 \frac{1}{1+4x} dx \\ &= (0.5 - 0) \cdot \frac{f(0) + f(0.5)}{2} + (1 - 0.5) \cdot \frac{f(1) + f(0.5)}{2} \\ &= \frac{7}{15} \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Teilaufgabe a

Eine Quadraturformel $(b_i, c_i)_{i=1, \dots, s}$ hat die Ordnung p , falls sie exakte Lösungen für alle Polynome vom Grad $\leq p - 1$ liefert.

Teilaufgabe b

Für die ersten 3. Ordnungsbedingungen gilt:

$$\begin{aligned}1 &= \sum_{i=0}^s b_i \\ \frac{1}{2} &= \sum_{i=0}^s b_i \cdot c_i \\ \frac{1}{3} &= \sum_{i=0}^s b_i \cdot c_i^2\end{aligned}$$

Teilaufgabe c

Wähle die Simpson-Regel, also $c_1 = 0, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = 1$ und $b_1 = b_3 = \frac{1}{6}$ und $b_2 = \frac{4}{6}$.

Überprüfe nun Ordnungsbedingungen 1-4 \Rightarrow Simpson-Regel hat Ordnung 4 Überprüfe Ordnungsbedingung 5 \Rightarrow Simpson-Regel hat nicht Ordnung 5.