

# 1 Fragen zu Definitionen

## 1.) Definition topologischer Raum

### Definition 1

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar  $(X, \mathfrak{T})$  bestehend aus einer Menge  $X$  und  $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$  mit folgenden Eigenschaften

- (i)  $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$
- (ii) Sind  $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}$ , so ist  $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{T}$
- (iii) Ist  $I$  eine Menge und  $U_i \in \mathfrak{T}$  für jedes  $i \in I$ , so ist  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathfrak{T}$

Die Elemente von  $\mathfrak{T}$  heißen **offene Teilmengen** von  $X$ .

$A \subseteq X$  heißt **abgeschlossen**, wenn  $X \setminus A$  offen ist.

Ich glaube es ist unnötig in (i) zu fordern, dass  $\emptyset \in \mathfrak{T}$  gilt, da man das mit (iii) bereits abdeckt:

Sei in (iii) die Indexmenge  $I = \emptyset$ . Dann muss gelten:

$$\bigcup_{i \in \emptyset} U_i = \emptyset \in \mathfrak{T}$$

## 4.) Knotendiagramm:

### Definition 2

Ein **Knotendiagramm** eines Knotens  $\gamma$  ist eine Projektion  $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow E$  auf eine Ebene  $E$ , sodass  $|\pi^{-1}(x) \cap C| \leq 2$  für jedes  $x \in D$ , wobei  $C = \gamma(S^1)$ .

Ist  $(\pi|_C)^{-1}(x) = \{y_1, y_2\}$ , so **liegt**  $y_1$  **über**  $y_2$ , wenn  $(y_1 - x) = \lambda(y_2 - x)$  für ein  $\lambda > 1$  ist.

Sollte das jeweils  $\pi|_C$  (sprich: „ $\pi$  eingeschränkt auf  $C$ “) sein?

## 5.) Isotopie/Knoten

### Definition 3

Zwei Knoten  $\gamma_1, \gamma_2 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  heißen **äquivalent**, wenn es eine stetige Abbildung

$$H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

gibt mit

$$H(z, 0) = \gamma_1(z) \quad \forall z \in S^1$$

$$H(z, 1) = \gamma_2(z) \quad \forall z \in S^1$$

und für jedes feste  $t \in [0, 1]$  ist

$$H_z : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2, z \mapsto H(z, t)$$

ein Knoten. Die Abbildung  $H$  heißt **Isotopie** zwischen  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$ .

Fehlt hier nicht etwas wie „ $\forall z \in S^1$ “ (nun rot ergänzt).

## 6.) Basisbeispiele

- Kennst du ein Beispiel für eine Subbasis in einem Topologischen Raum, die zugleich eine Basis ist?
- Kennst du ein Beispiel für eine Subbasis in einem Topologischen Raum, die keine Basis ist?
- Kennst du ein Beispiel für eine Basis in einem Topologischen Raum, die keine Subbasis ist?

## 9.) Mannigfaltigkeit mit Rand

### Definition 4

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $n \in \mathbb{N}$ .

- a) Eine  $n$ -dimensionale **Karte** auf  $X$  ist ein Paar  $(U, \varphi)$ , wobei  $U \subseteq X$  offen und  $\varphi : U \rightarrow V$  Homöomorphismus von  $U$  auf eine offene Teilmenge  $V \subseteq \mathbb{R}^n$ .
- b) Ein  $n$ -dimensionaler **Atlas**  $\mathcal{A}$  auf  $X$  ist eine Familie  $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$  von Karten auf  $X$ , sodass  $\bigcup_{i \in I} U_i = X$ .

- c)  $X$  heißt (topologische)  $n$ -dimensionale **Mannigfaltigkeit**, wenn  $X$  hausdorffsch ist, eine abzählbare Basis der Topologie hat und ein  $n$ -dimensionalen Atlas besitzt.

### Definition 5

Sei  $X$  ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis der Topologie.  $X$  heißt  $n$ -dimensionale **Mannigfaltigkeit mit Rand**, wenn es einen Atlas  $(U_i, \varphi_i)$  gibt, wobei  $U_i \subseteq X_i$  offen und  $\varphi_i$  ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge von

$$R_{+,0}^n := \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_m \geq 0 \}$$

ist.

Wieso wird bei der Mannigfaltigkeit mit Rand nicht gefordert, dass sie eine abzählbare Basis haben soll? Sollte man nicht vielleicht hinzufügen, dass der Atlas  $n$ -dimensional sein soll?

## 11.) Produkttopologie

### Definition 6

Seien  $X_1, X_2$  topologische Räume.

$U \subseteq X_1 \times X_2$  sei offen, wenn es zu jedem  $x = (x_1, x_2) \in U$  Umgebungen  $U_i$  um  $x_i$  mit  $i = 1, 2$  gibt, sodass  $U_1 \times U_2 \subseteq U$  gilt.

$\mathfrak{T} = \{ U \subseteq X_1 \times X_2 \mid U \text{ offen} \}$  ist eine Topologie auf  $X_1 \times X_2$ . Sie heißt **Produkttopologie**.  $\mathfrak{B} = \{ U_1 \times U_2 \mid U_i \text{ offen in } X_i, i = 1, 2 \}$  ist eine Basis von  $\mathfrak{T}$ .

Gibt es ein Beispiel, das zeigt, dass nicht  $\mathfrak{B} = \mathfrak{T}$  gilt?

### 1.1 12.) $\Delta^2$ explizit

Wie sieht der Standard-Simplex der dim. 2, also  $\Delta^2$ , explizit notiert aus? Praktisch ist das ja die konvexe Hülle der Standard-Basisvektoren  $e_0, e_1, e_2$

(also  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ), also ein Polyeder mit vier Flächen im  $\mathbb{R}^3$  (jedoch kein regelmäßiges Tetraeder, oder?)

Das ist dann nur das Gitter dieses Polyeders, aber nicht die Flächen oder sogar etwas innerhalb vom Polyeder, oder?