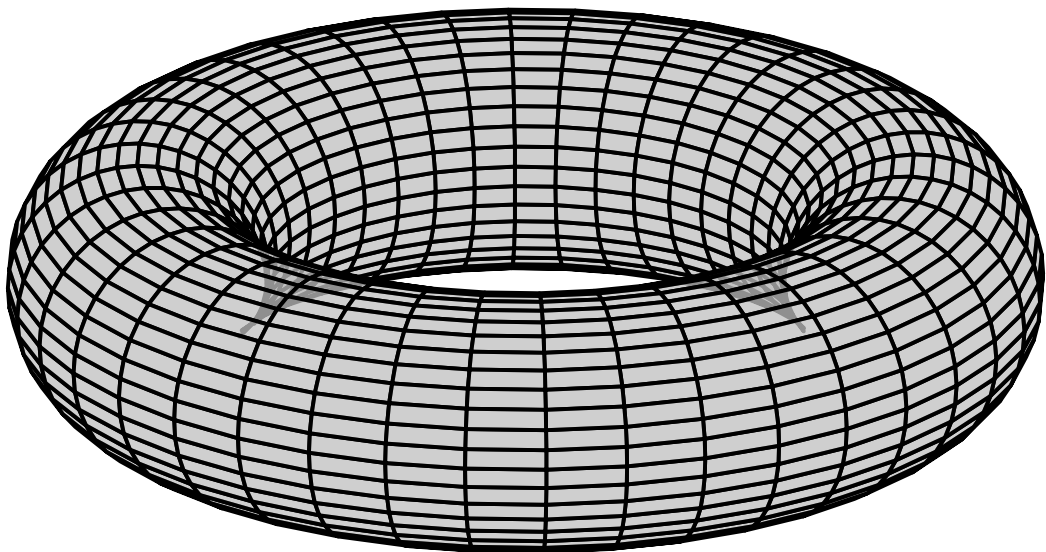


# Geometrie und Topologie



Siehe [GitHub](#)

6. November 2013

# Vorwort

Dieses Skript wird/wurde im Wintersemester 2013/2014 geschrieben. Es beinhaltet Vorlesungsnotizen von Studenten zur Vorlesung von Prof. Dr. Herrlich.

Es darf jeder gerne Verbesserungen einbringen!

Die Kurz-URL des Projekts lautet [tinyurl.com/GeoTopo](http://tinyurl.com/GeoTopo).

An dieser Stelle möchte ich noch Herrn Prof. Dr. Herrlich für einige Korrekturvorschläge und einen gut strukturierten Tafelanschrieb danken, der als Vorlage für dieses Skript diente. Vielen Dank auch an Frau Lenz, die es mir erlaubt hat, ihre Übungsaufgaben und meine Lösungen zu benutzen.

## Was ist Topologie?

Die Kugeloberfläche  $S^2$  lässt sich durch strecken, stauchen und umformen zur Würfeloberfläche oder der Oberfläche einer Pyramide verformen, aber nicht zum  $\mathbb{R}^2$  oder zu einem Torus  $T^2$ . Für den  $\mathbb{R}^2$  müsste man die Oberfläche unendlich ausdehnen und für einen Torus müsste man ein Loch machen.

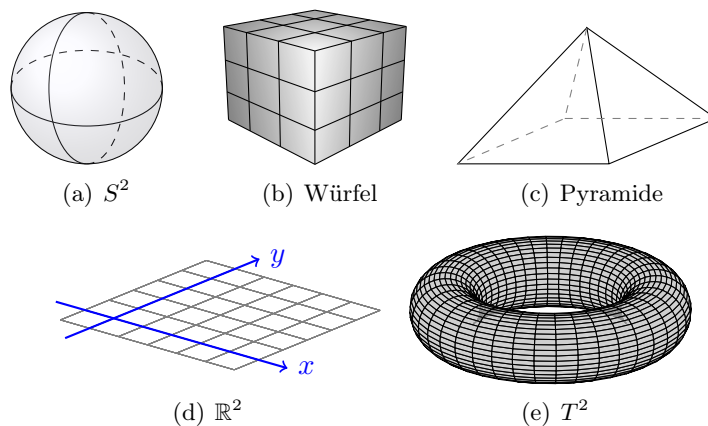


Abbildung 0.1: Beispiele für verschiedene Formen

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Topologische Grundbegriffe</b>	<b>2</b>
1.1	Topologische Räume . . . . .	2
1.2	Metrische Räume . . . . .	5
1.3	Stetigkeit . . . . .	8
1.4	Zusammenhang . . . . .	10
1.5	Kompaktheit . . . . .	12
	Übungsaufgaben . . . . .	16
	<b>Lösungen der Übungsaufgaben</b>	<b>17</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>18</b>
	<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>19</b>

# 1 Topologische Grundbegriffe

## 1.1 Topologische Räume

### Definition 1

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar  $(X, \mathfrak{T})$  bestehend aus einer Menge  $X$  und  $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$  mit folgenden Eigenschaften

- (i)  $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$
- (ii) Sind  $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}$ , so ist  $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{T}$
- (iii) Ist  $I$  eine Menge und  $U_i \in \mathfrak{T}$  für jedes  $i \in I$ , so ist  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathfrak{T}$

Die Elemente von  $\mathfrak{T}$  heißen **offene Teilmengen** von  $X$ .

$A \subseteq X$  heißt **abgeschlossen**, wenn  $X \setminus A$  offen ist.

Es gibt auch Mengen, die weder abgeschlossen, noch offen sind wie z. B.  $[0, 1)$ . Auch gibt es Mengen, die sowohl abgeschlossen als auch offen sind.

### Korollar 1.1 (Mengen, die offen und abgeschlossen sind, existieren)

Betrachte  $\emptyset$  und  $X$  mit der „trivialen Topologie“  $\mathfrak{T}_{\text{triv}} = \{ \emptyset, X \}$ .

Es gilt:  $X \in \mathfrak{T}$  und  $\emptyset \in \mathfrak{T}$ , d. h.  $X$  und  $\emptyset$  sind offen. Außerdem  $X^C = X \setminus X = \emptyset \in \mathfrak{T}$  und  $X \setminus \emptyset = X \in \mathfrak{T}$ , d. h.  $X$  und  $\emptyset$  sind als Komplement offener Mengen abgeschlossen. ■

### Beispiel 1

- 1)  $X = \mathbb{R}^n$  mit der euklidischen Metrik.

$$U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen} \Leftrightarrow \text{für jedes } x \in U \text{ gibt es } r > 0, \\ \text{sodass } \mathfrak{B}_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < r \} \subseteq U$$

Also:  $\mathfrak{T} = \{ M \subseteq X \mid M \text{ ist offene Kugel} \}$

- 2) Allgemeiner:  $(X, d)$  metrischer Raum

- 3)  $X$  Menge,  $\mathfrak{T} = \mathcal{P}(X)$  heißt „diskrete Topologie“

- 4)  $X := \mathbb{R}, \mathfrak{T}_Z := \{ U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ endlich} \} \cup \{ \emptyset \}$  heißt „Zariski-Topologie“  
Beobachtungen:

- $U \in \mathfrak{T}_Z \Leftrightarrow \exists f \in \mathbb{R}[X]$ , sodass  $\mathbb{R} \setminus U = V(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0 \}$
- Es gibt keine disjunkten offenen Mengen in  $\mathfrak{T}_Z$

- 5)  $X := \mathbb{R}^n, \mathfrak{T}_Z = \{ U \subseteq \mathbb{R}^n \mid \text{Es gibt Polynome } f_1, \dots, f_r \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \text{ sodass } \mathbb{R}^n \setminus U = V(f_1, \dots, f_r) \}$

- 6)  $X := \{0, 1\}$ ,  $\mathfrak{T} = \{\emptyset, \{0, 1\}, \{0\}\}$  heißt „Sierpińskiraum“.  
 abgeschlossene Mengen:  $\emptyset, \{0, 1\}, \{1\}$

**Definition 2**

Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum,  $x \in X$ .

Eine Teilmenge  $U \subseteq X$  heißt **Umgebung** von  $x$ , wenn es ein  $U_0 \in \mathfrak{T}$  gibt mit  $x \in U_0$  und  $U_0 \subseteq U$ .

**Definition 3**

Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum,  $M \subseteq X$  eine Teilmenge.

- a)  $M^\circ := \{x \in M \mid M \text{ ist Umgebung von } x\} = \bigcup_{\substack{U \subseteq M \\ U \in \mathfrak{T}}} U$  heißt **Inneres** oder **offener Kern** von  $M$ .

- b)  $\overline{M} := \bigcap_{\substack{M \subseteq A \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$  heißt **abgeschlossene Hülle** oder **Abschluss** von  $M$ .

- c)  $\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$  heißt **Rand** von  $M$ .

- d)  $M$  heißt **dicht** in  $X$ , wenn  $\overline{M} = X$  ist.

**Beispiel 2**

- 1)  $X = \mathbb{R}$  mit euklidischer Topologie  
 $M = \mathbb{Q} \Rightarrow \overline{M} = \mathbb{R}, \quad M^\circ = \emptyset$
- 2)  $X = \mathbb{R}, M = (a, b) \Rightarrow \overline{M} = [a, b]$
- 3)  $X = \mathbb{R}, \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_Z$   
 $M = (a, b) \Rightarrow \overline{M} = \mathbb{R}$

**Definition 4**

Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum.

- a)  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$  heißt **Basis** der Topologie  $\mathfrak{T}$ , wenn jedes  $U \in \mathfrak{T}$  Vereinigung von Elementen aus  $\mathfrak{B}$  ist.
- b)  $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$  heißt **Subbasis**, wenn jedes  $U \in \mathfrak{T}$  Vereinigung von endlich vielen Durchschnitten von Elementen aus  $\mathfrak{B}$  ist.

**Beispiel 3**

Gegeben sei  $X = \mathbb{R}^n$  mit euklidischer Topologie  $\mathfrak{T}$ . Dann ist

$$\mathfrak{B} = \{B_r(x) \mid r \in \mathbb{Q}_{>0}, x \in \mathbb{Q}^n\}$$

ist eine abzählbare Basis von  $\mathfrak{T}$ .

**Bemerkung 1**

Sei  $X$  eine Menge und  $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ . Dann gibt es genau eine Topologie  $\mathfrak{T}$  auf  $X$ , für die  $\mathfrak{B}$  Subbasis ist.

**Definition 5**

Sei  $(X, \mathfrak{T})$  ein topologischer Raum,  $Y \subseteq X$ .

$\mathfrak{T}_Y := \{U \cap Y \mid U \in \mathfrak{T}\}$  ist eine Topologie auf  $Y$ .

$\mathfrak{T}_Y$  heißt **Spurtopologie** und  $(Y, \mathfrak{T}_Y)$  heißt ein **Teilraum** von  $(X, \mathfrak{T})$

**Definition 6**

Seien  $X_1, X_2$  topologische Räume.

$U \subseteq X_1 \times X_2$  sei offen, wenn es zu jedem  $x = (x_1, x_2) \in U$  Umgebungen  $U_i$  um  $x_i$  mit  $i = 1, 2$  gibt, sodass  $U_1 \times U_2 \subseteq U$  gilt.

$\mathfrak{T} = \{ U \subseteq X_1 \times X_2 \mid U \text{ offen} \}$  ist eine Topologie auf  $X_1 \times X_2$ . Sie heißt **Produkttopologie**.

$\mathfrak{B} = \{ U_1 \times U_2 \mid U_i \text{ offen in } X_i, i = 1, 2 \}$  ist eine Basis von  $\mathfrak{T}$ .

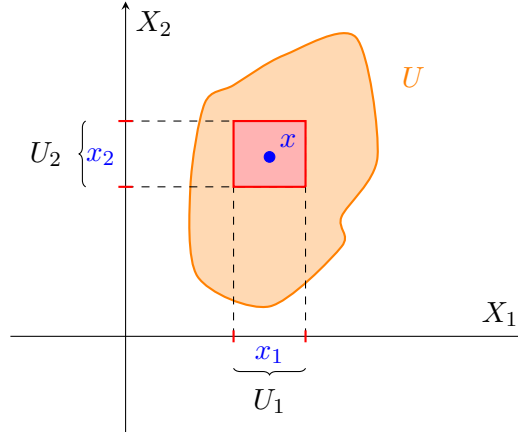


Abbildung 1.1: Zu  $x = (x_1, x_2)$  gibt es Umgebungen  $U_1, U_2$  mit  $U_1 \times U_2 \subseteq U$

**Beispiel 4**

- 1)  $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$  mit euklidischer Topologie.  
 $\Rightarrow$  Die Produkttopologie auf  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$  stimmt mit der euklidischen Topologie auf  $\mathbb{R}^2$  überein.
- 2)  $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$  mit Zariski-Topologie.  $\mathfrak{T}$  Produkttopologie auf  $\mathbb{R}^2$ :  $U_1 \times U_2$   
 (Siehe Abb. 1.2)

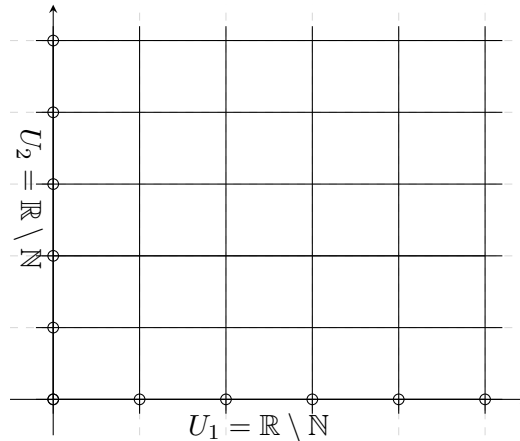


Abbildung 1.2: Zariski-Topologie auf  $\mathbb{R}^2$

**Definition 7**

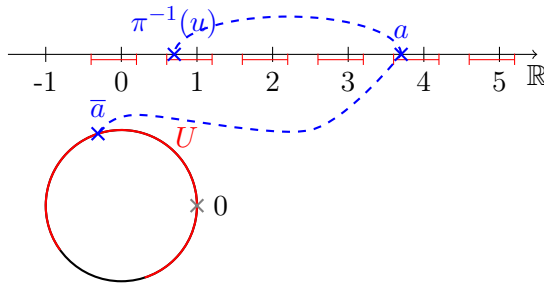
Sei  $X$  topologischer Raum,  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ ,  $\overline{X} = X/\sim$  sei die Menge der Äquivalenzklassen,  $\pi : x \rightarrow \overline{x}, \quad x \mapsto [x]_{\sim}$ .

$$\mathfrak{T}_{\overline{X}} := \{ U \subseteq \overline{X} \mid \pi^{-1}(U) \in \mathfrak{T}_X \}$$

$(\overline{X}, \mathfrak{T}_{\overline{X}})$  heißt **Quotiententopologie**.

**Beispiel 5**

$$X = \mathbb{R}, a \sim b :\Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$$



$$0 \sim 1, \text{ d. h. } [0] = [1]$$

**Beispiel 6**

$$X = \mathbb{R}^2, (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{aligned} x_1 - x_2 &\in \mathbb{Z} \\ y_1 - y_2 &\in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

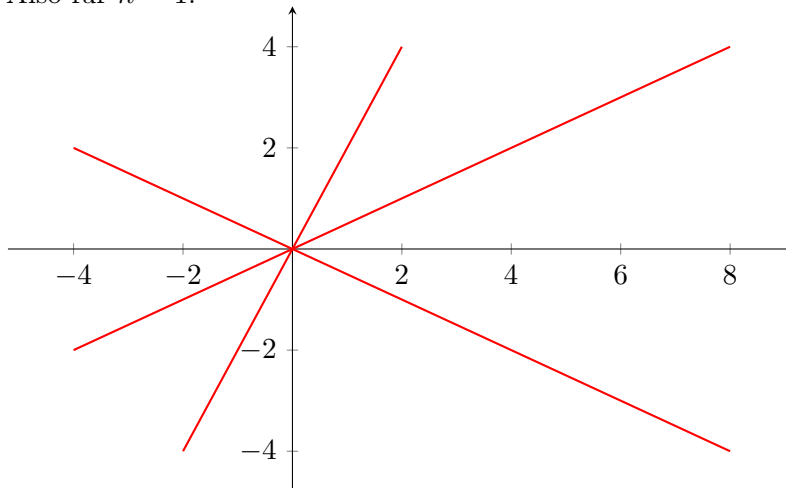
$X/\sim$  ist ein Torus.

**Beispiel 7**

$$\begin{aligned} X = \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}, x \sim y &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^\times \text{ mit } y = \lambda x \\ &\Leftrightarrow x \text{ und } y \text{ liegen auf der gleichen Ursprungsgerade} \end{aligned}$$

$$\overline{X} = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$

Also für  $n = 1$ :



## 1.2 Metrische Räume

**Definition 8**

Sei  $X$  eine Menge. Eine Abbildung  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  heißt **Metrik**, wenn gilt:

- (i) Definitheit:  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (ii) Symmetrie:  $d(x, y) = d(y, x)$
- (iii) Dreiecksungleichung:  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Das Paar  $(X, d)$  heißt ein **metrischer Raum**.

**Bemerkung 2**

Sei  $(X, d)$  ein metrischer Raum und

$$\mathfrak{B}_r(x) := \{ y \in X \mid d(x, y) < r \} \text{ für } x \in X, r \in \mathbb{R}^+$$

$\mathfrak{B}$  ist Basis einer Topologie auf  $X$ .

**Beispiel 8**

Sei  $V$  ein euklidischer oder hermitescher Vektorraum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Dann wird  $V$  durch  $d(x, y) := \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$  zum metrischen Raum.

**Beispiel 9 (diskrete Metrik)**

Sei  $X$  eine Menge. Dann heißt

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

die **diskrete Metrik**. Die Metrik  $d$  induziert die **diskrete Topologie**.

**Beispiel 10**

$X = \mathbb{R}^2$  und  $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) := \max(\|x_1 - x_2\|, \|y_1 - y_2\|)$  ist Metrik.

*Beobachtung:*  $d$  erzeugt die euklidische Topologie.

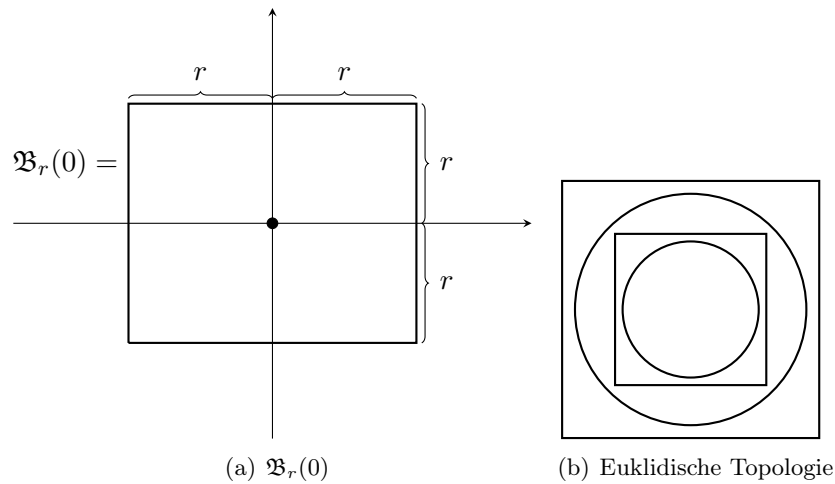
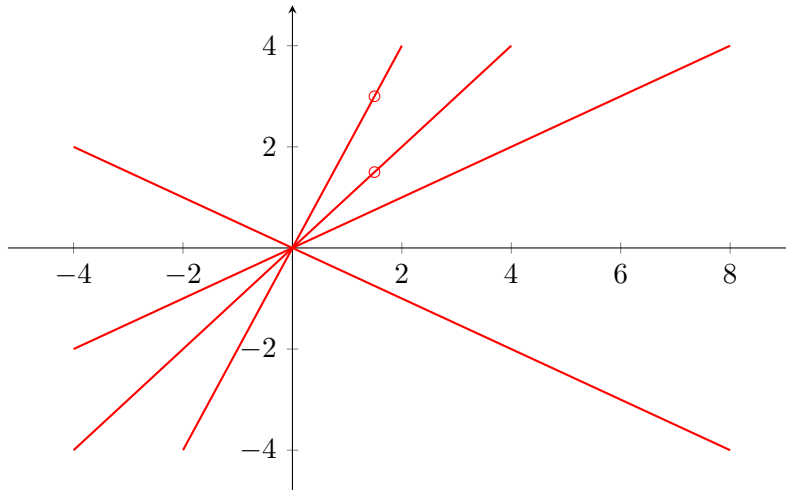


Abbildung 1.3: Veranschaulichungen zur Metrik  $d$

**Beispiel 11 (SNCF-Metrik<sup>1</sup>)**

$X = \mathbb{R}^2$





**Definition 9**

Ein topologischer Raum  $X$  heißt **hausdorffsch**, wenn es für je zwei Punkte  $x \neq y$  in  $X$  Umgebungen  $U_x$  um  $x$  und  $U_y$  um  $y$  gibt, sodass  $U_x \cap U_y = \emptyset$ .

**Bemerkung 3 (Trennungseigenschaft)**

Metrische Räume sind hausdorffsch, da

$$d(x, y) > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon : \mathfrak{B}_\varepsilon(x) \cap \mathfrak{B}_\varepsilon(y) = \emptyset$$

Ein Beispiel für einen topologischen Raum, der nicht hausdorffsch ist, ist  $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_Z)$ .

**Bemerkung 4**

Seien  $X, X_1, X_2$  Hausdorff-Räume.

- a) Jeder Teilraum um  $X$  ist Hausdorffsch.
- b)  $X_1 \times X_2$  ist Hausdorffsch.

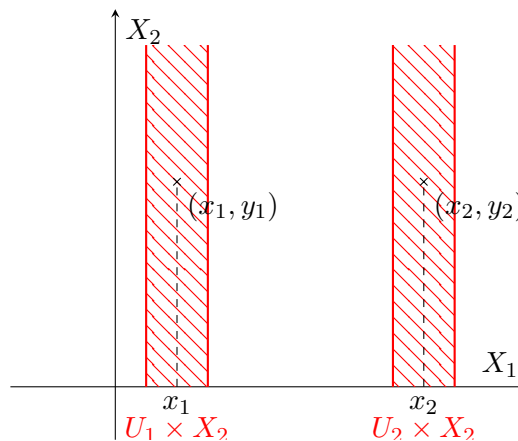


Abbildung 1.4: Wenn  $X_1, X_2$  hausdorffsch sind, dann auch  $X_1 \times X_2$

**Definition 10**

Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $(x)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $X$ .  $x \in X$  heißt **Grenzwert** oder **Limes** von  $(x_n)$ , wenn es für jede Umgebung  $U$  von  $x$  ein  $n_0$  gibt, sodass  $x_n \in U$  für alle  $n \geq n_0$ .

**Korollar 1.2**

Ist  $X$  hausdorffsch, so hat jede Folge in  $X$  höchstens einen Grenzwert.

**Beweis:** Annahme:  $x$  und  $y$  mit  $x \neq y$  sind Grenzwerte der Folge  $(x_n)$ .

Nach Voraussetzung gibt es Umgebungen  $U_x$  von  $x$  und  $U_y$  von  $y$  mit  $U_x \cap U_y = \emptyset$ . Nach Annahme gibt es  $n_0$  mit  $x_n \in U_x \cap U_y$  für alle  $n \geq n_0 \Rightarrow$  Widerspruch ■

## 1.3 Stetigkeit

### Definition 11

Seien  $X, Y$  topologische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung.

- a)  $f$  heißt **stetig**, wenn für jedes offene  $U \subseteq Y$  auch  $f^{-1}(U) \subseteq X$  offen ist.
- b)  $f$  heißt **Homöomorphismus**, wenn es eine stetige Abbildung  $g : Y \rightarrow X$  gibt, sodass  $g \circ f = \text{id}_X$  und  $f \circ g = \text{id}_Y$ .

### Korollar 1.3

Seien  $X, Y$  metrische Räume und  $f : X \rightarrow Y$  eine Abbildung.

Dann gilt:  $f$  ist stetig  $\Leftrightarrow$  zu jedem  $x \in X$  und jedem  $\varepsilon > 0$  gibt es  $\delta(x, \varepsilon) > 0$ , sodass für alle  $y \in X$  mit  $d_X(x, y) < \delta$  gilt  $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$ .

**Beweis:** „ $\Rightarrow$ “: Sei  $x \in X, \varepsilon > 0$  gegeben und  $U := \mathfrak{B}_\varepsilon(f(x))$ .

Dann ist  $U$  offen in  $Y$ .

$\stackrel{11,a}{\Rightarrow} f^{-1}(U)$  ist offen in  $X$ . Dann ist  $x \in f^{-1}(U)$ .

$\Rightarrow \exists \delta > 0$ , sodass  $\mathfrak{B}_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U)$

$\Rightarrow f(\mathfrak{B}_\delta(x)) \subseteq U$

$\Rightarrow \{y \in X \mid d_X(x, y) < \delta\} \Rightarrow \text{Beh.}$

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $U \subseteq Y$  offen,  $x \in f^{-1}(U)$ .

Dann gibt es  $\varepsilon > 0$ , sodass  $\mathfrak{B}_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$

$\stackrel{\text{Vor.}}{\Rightarrow}$  Es gibt  $\delta > 0$ , sodass  $f(\mathfrak{B}_\delta(x)) \subseteq \mathfrak{B}_\varepsilon(f(x))$

$\Rightarrow \mathfrak{B}_\delta(x) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{B}_\varepsilon(f(x))) \subseteq f^{-1}(U)$  ■

### Bemerkung 5

Eine Ableitung  $f : X \rightarrow Y$  von topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn für jede abgeschlossene Teilmenge  $A \subseteq Y$  gilt:  $f^{-1}(A) \subseteq X$  ist abgeschlossen.

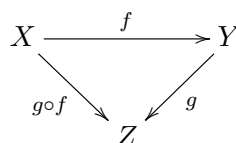
### Beispiel 12

- 1) Für jeden topologischen Raum  $X$  gilt:  $\text{Id}_X : X \rightarrow X$  ist Homöomorphismus.
- 2) Ist  $Y$  trivialer topologischer Raum, d.h.  $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{\text{triv}}$ , so ist jede Abbildung  $f : X \rightarrow Y$  stetig.
- 3) Ist  $X$  diskreter topologischer Raum, so ist  $f : X \rightarrow Y$  stetig für jeden topologischen Raum  $Y$  und jede Abbildung  $f$ .
- 4) Sei  $X = [0, 1), Y = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$  und  $f(t) = e^{2\pi it}$ . Die Umkehrabbildung  $g$  ist nicht stetig, da  $g^{-1}(U)$  nicht offen ist (vgl. Abb. 1.5)

### Korollar 1.4

Seien  $X, Y, Z$  topologische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  und  $g : Y \rightarrow Z$  stetige Abbildungen.

Dann ist  $g \circ f : X \rightarrow Z$  stetig.



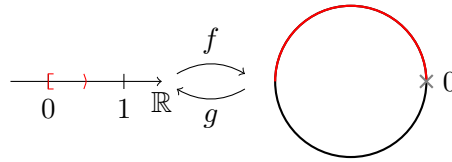


Abbildung 1.5: Beispiel einer stetigen Funktion  $f$ , deren Umkehrabbildung  $g$  nicht stetig ist.

**Beweis:** Sei  $U \subseteq Z$  offen  $\Rightarrow (g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ .  $g^{-1}(U)$  ist offen in  $Y$  weil  $g$  stetig ist,  $f^{-1}(g^{-1}(U))$  ist offen in  $X$ , weil  $f$  stetig ist. ■

### Bemerkung 6

- a) Für jeden topologischen Raum ist  $\text{Homöo}(X) := \{ f : X \rightarrow X \mid f \text{ ist Homöomorphismus} \}$  eine Gruppe.
- b) Jede Isometrie  $f : X \rightarrow Y$  zwischen metrischen Räumen ist ein Homöomorphismus.
- c)  $\text{Isom}(X) := \{ f : X \rightarrow X \mid f \text{ ist Isometrie} \}$  ist Untergruppe von  $\text{Homöo}(X)$  für jeden metrischen Raum  $X$ .

### Korollar 1.5

Seien  $X, Y$  topologische Räume.  $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$  und  $\pi_Y : X \times Y \rightarrow Y$  die Projektionen

$$(x, y) \mapsto x \quad (x, y) \mapsto y$$

Wird  $X \times Y$  mit der Produkttopologie versehen, so sind  $\pi_X$  und  $\pi_Y$  stetig.

**Beweis:** Sei  $U \subseteq X$  offen  $\Rightarrow \pi_X^{-1}(U) = U \times Y$  ist offen in  $X \times Y$ . ■

### Korollar 1.6

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $\sim$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$ ,  $\overline{X} = X/\sim$  der Quotientenraum versehen mit der Quotiententopologie,  $\pi : X \rightarrow \overline{X}$ ,  $x \mapsto [x]_\sim$ .

Dann ist  $\pi$  stetig.

**Beweis:** Nach Definition ist  $U \subseteq \overline{X}$  offen  $\Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \subseteq X$  offen. ■

*Beobachtung:* Die Quotiententopologie ist die feinste Topologie, sodass  $\pi$  stetig wird.

### Beispiel 13 (Stereographische Projektion)

$\mathbb{R}^n$  und  $S^n \setminus \{N\}$  sind homöomorph für beliebiges  $N \in S^n$

$$\begin{aligned} S^n &= \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1 \} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1 \right\} \end{aligned}$$

$$\text{Es sei } N = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} f : S^n \setminus \{N\} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ &\text{genau ein Punkt} \\ P &\mapsto \overbrace{L_P \cap H} \end{aligned}$$

wobei  $\mathbb{R}^n = H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0 \right\}$  und  $L_P$  die Gerade in  $\mathbb{R}^{n+1}$  durch  $N$  und  $P$  ist.

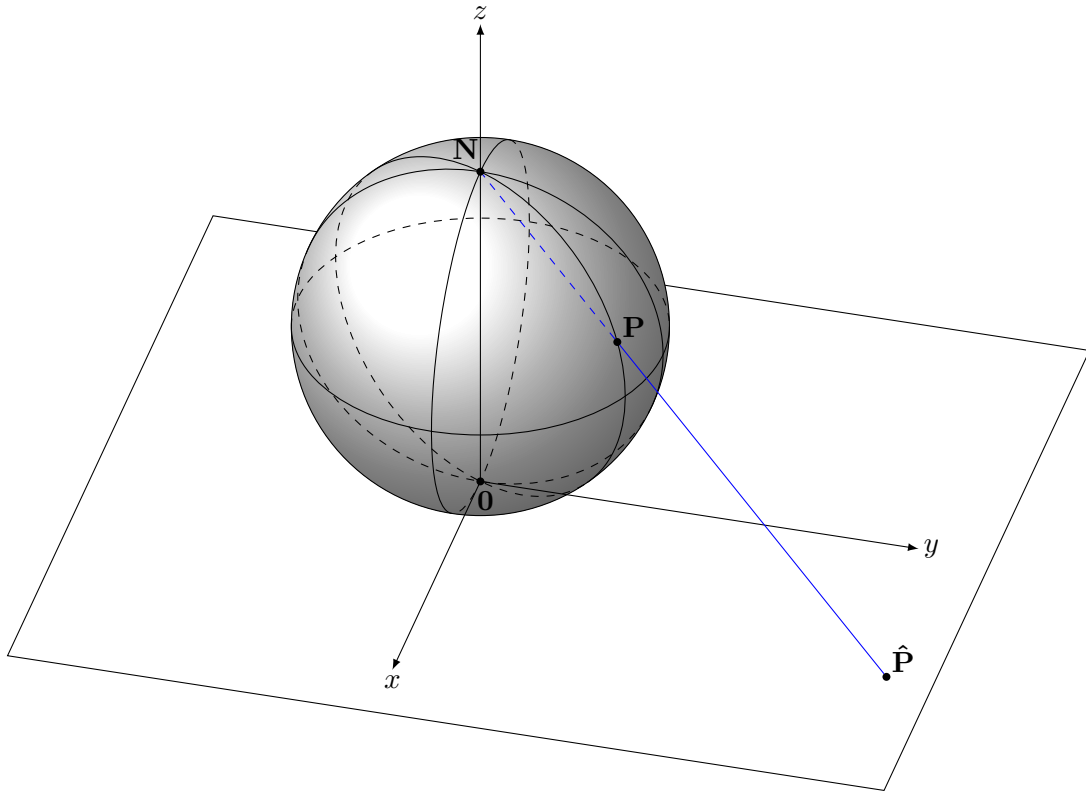


Abbildung 1.6: Visualisierung der sphärischen Projektion

Bildquelle: [texample.net/tikz/examples/map-projections](https://texample.net/tikz/examples/map-projections)

Sei  $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$ , so ist  $x_{n+1} < 1$ , also ist  $L_P$  nicht parallel zu  $H$ . Also schneiden sich  $L_P$  und  $H$  in genau einem Punkt  $\hat{P}$ .

Es gilt:  $f$  ist bijektiv und die Umkehrabbildung ist ebenfalls stetig.

## 1.4 Zusammenhang

### Definition 12

Ein Raum  $X$  heißt **zusammenhängend**, wenn es keine offenen nichtleeren Teilmengen  $U_1, U_2$  von  $X$  gibt mit  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$  und  $U_1 \cup U_2 = X$ .

### Bemerkung 7

$X$  ist zusammenhängend  $\Leftrightarrow$  Es gibt keine nichtleeren abgeschlossenen Teilmengen  $A_1, A_2$  mit  $A_1 \cap A_2 = \emptyset$  und  $A_1 \cup A_2 = X$ .

### Bemerkung 8

Eine Teilmenge  $Y \subseteq X$  heißt zusammenhängend, wenn  $Y$  als topologischer Raum mit der Teilraumtopologie zusammenhängend ist.

**Beispiel 14 (Zusammenhang von Räumen)**

1.  $\mathbb{R}^n$  ist mit der euklidischen Topologie zusammenhängend, denn:

Angenommen,  $\mathbb{R}^n = U_1 \cup U_2$  mit  $U_i$  offen,  $U_i \neq \emptyset$  und  $U_1 \cap U_2 = \emptyset$  existiert.

Sei  $x \in U_1, y \in U_2$  und  $[x, y]$  die Strecke zwischen  $x$  und  $y$ . Dann ist  $U_1 \cap [x, y]$  die Vereinigung von offenen Intervallen. Dann gibt es  $z \in [x, y]$  mit  $z \in \partial(U_1 \cap [x, y])$ , aber  $z \notin U_1 \Rightarrow z \in U_2$ . In jeder Umgebung von  $z$  liegt ein Punkt von  $U_1 \Rightarrow$  Widerspruch zu  $U_2$  offen.

2.  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  ist nicht zusammenhängend, denn  $\mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}_{<0} \cup \mathbb{R}_{>0}$   
 3.  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  ist zusammenhängend.  
 4.  $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$  ist nicht zusammenhängend, da

$$(\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_{<\sqrt{2}}) \cup (\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_{>\sqrt{2}}) = \mathbb{Q}$$

5.  $\{x\}$  ist zusammenhängend für jedes  $x \in X$ , wobei  $X$  ein topologischer Raum ist.  
 6.  $\mathbb{R}$  mit Zariski-Topologie ist zusammenhängend

**Korollar 1.7**

Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $A \subseteq X$  zusammenhängend. Dann ist auch  $\overline{A}$  zusammenhängend.

**Beweis:** Angenommen  $\overline{A} = A_1 \cup A_2, A_i$  abgeschlossen,  $\neq \emptyset, A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$$\Rightarrow A = \underbrace{(A \cap A_1)}_{\text{abgeschlossen}} \cup \underbrace{(A \cap A_2)}_{\text{abgeschlossen}} \\ \text{disjunkt}$$

Wäre  $A \cap A_1 = \emptyset$

$$\begin{aligned} \Rightarrow A &\subseteq A_2 \\ \Rightarrow \overline{A} &\subseteq A_2 \\ \Rightarrow A_1 &= \emptyset \end{aligned} \quad \Rightarrow \text{Widerspruch}$$

■

**Korollar 1.8**

Sei  $X$  topologischer Raum,  $A, B \subseteq X$  zusammenhängend.

Ist  $A \cap B \neq \emptyset$ , dann ist  $A \cup B$  zusammenhängend.

**Beweis:** Sei  $A \cup B = U_1 \cup U_2, U_i \neq \emptyset$  offen, disjunkt

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{G}} A &= (A \cap U_1) \cup (A \cap U_2) \text{ offen, disjunkt} \\ A &\xrightarrow{\text{zhgd.}} A \cap U_1 = \emptyset \\ A \cap B &\neq \emptyset \Rightarrow U_1 \subseteq B \\ B &= \underbrace{(B \cap U_1)}_{=U_1} \cup \underbrace{(B \cap U_2)}_{=\emptyset} \text{ ist unerlaubte Zerlegung} \end{aligned}$$

■

**Definition 13**

Sei  $X$  ein topologischer Raum.

Für  $x \in X$  sei

$$Z(x) := \bigcup_{\substack{A \subseteq X \text{ zhgd.} \\ x \in A}} A$$

$Z(x)$  heißt **Zusammenhangskomponente**.

**Korollar 1.9**

Sei  $X$  ein topologischer Raum. Dann gilt:

- a)  $Z(x)$  ist die größte zusammenhängende Teilmenge von  $X$ , die  $x$  enthält.
- b)  $Z(x)$  ist abgeschlossen.
- c)  $X$  ist disjunkte Vereinigung von Zusammenhangskomponenten.

**Beweis:** a) Sei  $Z(x) = A_1 \cup A_2$  mit  $A_i \neq \emptyset$  abgeschlossen, disjunkt.

Es sei  $x \in A_1$  und  $y \in A_2$ .  $y$  liegt in einer zusammenhängenden Teilmenge  $A$ , die auch  $x$  enthält.  $\Rightarrow A = \underbrace{(A \cap A_1)}_{\ni x} \cup \underbrace{(A \cap A_2)}_{\ni y}$  ist unerlaubte Zerlegung.

b) Nach Korollar 1.7 ist  $\overline{Z(x)}$  zusammenhängend  $\Rightarrow \overline{Z(x)} \subseteq Z(x) \Rightarrow Z(x) = \overline{Z(x)}$

c) Ist  $Z(y) \cap Z(x) \neq \emptyset \stackrel{1.8}{\Rightarrow} Z(y) \cup Z(x)$  ist zusammenhängend.

$$\begin{aligned} \Rightarrow Z(x) \cup Z(y) &\subseteq Z(x) \Rightarrow Z(y) \subseteq Z(x) \\ &\subseteq Z(y) \Rightarrow Z(x) \subseteq Z(y) \end{aligned}$$

■

**Korollar 1.10**

Sei  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Ist  $A \subseteq X$  zusammenhängend, so ist  $f(A) \subseteq Y$  zusammenhängend.

**Beweis:** Sei  $f(A) = U_1 \cup U_2, U_i \neq \emptyset$ , offen, disjunkt.

$$\Rightarrow f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2)$$

$$\Rightarrow A = \underbrace{(A \cap f^{-1}(U_1))}_{\neq \emptyset} \cup \underbrace{(A \cap f^{-1}(U_2))}_{\neq \emptyset}$$

■

## 1.5 Kompaktheit

**Definition 14**

Ein topologischer Raum  $X$  heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von  $X$  eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

$$\mathfrak{U} = \{ U_i \}_{i \in I}, \quad U_i \text{ offen in } X, \quad \bigcup_{i \in I} U_i = X$$

**Definition 15**

Sei  $X$  eine Menge und  $T \subseteq \mathcal{P}(X)$ .

$T$  heißt eine **Überdeckung** von  $X$ , wenn gilt:

$$\forall x \in X : \exists M \in T : x \in M$$

**Korollar 1.11**

$I = [0, 1]$  ist kompakt bezüglich der euklidischen Topologie.

**Beweis:** Sei  $(U_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $I$ .

z. Z.: Es gibt ein  $\delta > 0$ , sodass jedes Teilintervall der Länge  $\delta$  von  $I$  in einem der  $U_i$  enthalten ist.

Angenommen, es gibt kein solches  $\delta$ . Dann gibt es für jedes  $n \in \mathbb{N}$  ein Intervall  $I_n \subseteq [0, 1]$  der Länge  $1/n$  sodass  $I_n \not\subseteq U_i$  für alle  $i \in I$ .

Sei  $x_n$  der Mittelpunkt von  $I_n$ . Die Folge  $(x_n)$  hat einen Häufungspunkt  $x \in [0, 1]$ . Dann gibt es  $i \in I$  mit  $x \in U_i$ . Da  $U_i$  offen ist, gibt es ein  $\varepsilon > 0$ , sodass  $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U_i$ . Dann gibt es  $n$  mit  $1/n < \varepsilon/2$  und  $|x - x_n| < \varepsilon/2$ , also  $I_n \subseteq (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U_i$

$\Rightarrow$  Widerspruch

Dann überdecke  $[0, 1]$  mit endlich vielen Intervallen  $I_1, \dots, I_d$  der Länge  $\delta$ . Jedes  $I_j$  ist in  $U_{ij}$  enthalten.

$\Rightarrow U_{j_1}, \dots, U_{j_d}$  ist endliche Teilüberdeckung von  $U$  ■

**Beispiel 15**

1)  $\mathbb{R}$  ist nicht kompakt.

2)  $(0, 1)$  ist nicht kompakt.

$$U_n = (1/n, 1 - 1/n) \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = (0, 1)$$

3)  $\mathbb{R}$  mit der Zariski-Topologie ist kompakt und jede Teilmenge von  $\mathbb{R}$  ist es auch.

**Korollar 1.12**

Sei  $X$  kompakter Raum,  $A \subseteq X$  abgeschlossen. Dann ist  $A$  kompakt.

**Beweis:** Sei  $(V_i)_{i \in I}$  offene Teilmenge  $U_i \subseteq X$  mit  $V_i = U_i \cap A$

$$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

$$\Rightarrow \mathfrak{U} = \{ U_i \mid i \in I \} \cup \{ X \setminus A \} \text{ ist offene Überdeckung von } X$$

$$X \text{ kompakt} \Rightarrow \text{es gibt } i_1, \dots, i_n \in I, \text{ sodass } \bigcup_{j=1}^n U_{i_j} \cup (X \setminus A) = X$$

$$\Rightarrow \left( \bigcup_{j=1}^n U_{i_j} \cup (X \setminus A) \right) \cap A = A$$

$$\Rightarrow \bigcup_{j=1}^n \underbrace{(U_{i_j} \cap A)}_{=V_{i_j}} \cup \underbrace{((X \setminus A) \cap A)}_{=\emptyset}$$

$$\Rightarrow V_{i_1}, \dots, V_{i_n} \text{ Überdecken } A$$

■

Der Beweis ist komisch. Das würde ich gerne mit jemanden durchsprechen.

**Korollar 1.13**

Seien  $X, Y$  kompakte topologische Räume. Dann ist  $X \times Y$  mit der Produkttopologie kompakt.

**Beweis:** Sei  $(W_i)_{i \in I}$  eine offene Überdeckung von  $X \times Y$ . Für jedes  $(x, y) \in X \times Y$  gibt es offene Teilmengen  $U_{x,y}$  von  $X$  und  $V_{x,y}$  von  $Y$  sowie ein  $i \in I$ , sodass  $U_{x,y} \times V_{x,y} \subseteq W_i$ .

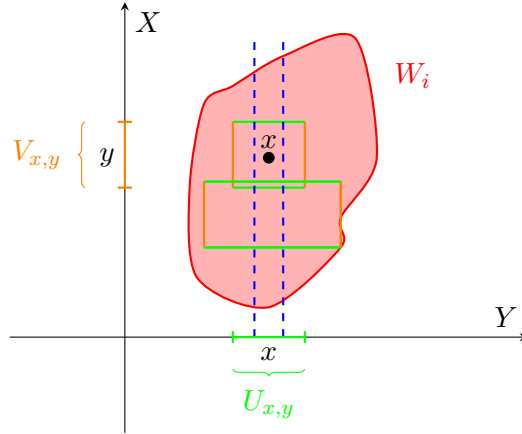


Abbildung 1.7: Die blaue Umgebung ist Schnitt vieler Umgebungen

Die offenen Mengen  $U_{x_0,y} \times V_{x_0,y}$  für festes  $x_0$  und alle  $y \in Y$  überdecken  $\{x_0\} \times Y$ . Da  $Y$  kompakt ist, ist auch  $\{x_0\} \times Y$  kompakt. Also gibt es  $y_1, \dots, y_{m(x_0)}$  mit  $\bigcup_{i=1}^{m(x_0)} U_{x_0,y_i} \times V_{x_0,y_i} \supseteq \{x_0\} \times Y$ . Sei  $U_{x_0} := \bigcap_{i=1}^{m(x_0)} U_{x_0,y_i}$ . Da  $X$  kompakt ist, gibt es  $x_1, \dots, x_n \in X$  mit  $\bigcup_{j=1}^n U_{x_j} = X \Rightarrow \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{i=1}^{m(x_j)} \underbrace{(U_{x_j,y_i} \times V_{x_j,y_i})}_{\text{Ein grün-oranges Kästchen}} \supseteq X \times Y$

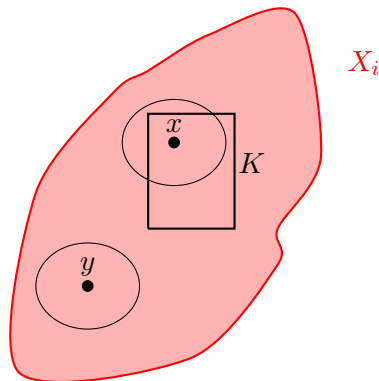
$\Rightarrow \bigcup_j \bigcup_i W_i(x_j, y_i) = X \times Y$  ■

**Korollar 1.14**

Sei  $X$  ein Hausdorffraum und  $K \subseteq X$  kompakt. Dann ist  $K$  abgeschlossen.

**Beweis:** z. Z.: Komplement ist offen

Ist  $X = K$ , so ist  $K$  abgeschlossen in  $X$ . Andernfalls sei  $y \in X \setminus K$ . Für jedes  $x \in K$  seien  $U_x$  bzw.  $V_y$  Umgebungen von  $x$  bzw. von  $y$ , sodass  $U_x \cap V_y = \emptyset$ .



Da  $K$  kompakt ist, gibt es endlich viele  $x_1, \dots, x_n \in K$ , sodass  $\bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \supseteq K$ .



Sei  $V := \bigcap_{i=1}^n V_{x_i}$   
 $\Rightarrow V \cap \left( \bigcup_{i=1}^n U_{x_i} \right) = \emptyset$   
 $\Rightarrow V \cap K = \emptyset$   
 $\Rightarrow V$  ist Überdeckung von  $y$ , die ganz in  $X \setminus K$  enthalten ist.  
 $\Rightarrow X \setminus K$  ist offen  
 $\Rightarrow K$  ist abgeschlossen ■

**Korollar 1.15**

Seien  $X, Y$  topologische Räume,  $f : X \rightarrow Y$  stetig. Ist  $K \subseteq X$  kompakt, so ist  $f(K) \subseteq Y$  kompakt.

**Beweis:** Sei  $(V_i)_{i \in I}$  offene Überdeckung von  $f(K) \Rightarrow (f^{-1}(V_i))_{i \in I}$  ist offene Überdeckung von

$\xRightarrow{K \text{ kompakt}}$  es gibt  $i_1, \dots, i_n$ , sodass  $f^{-1}(V_{i_1}), \dots, f^{-1}(V_{i_n})$  Überdeckung von  $K$  ist.  
 $\Rightarrow f(f^{-1}(V_{i_1})), \dots, f(f^{-1}(V_{i_n}))$  überdecken  $f(K)$ .

Es gilt:  $f(f^{-1}(V)) = V \cap f(X)$  ■

**Satz 1.16 (Heine-Borel)**

Eine Teilmenge von  $\mathbb{R}^n$  oder  $\mathbb{C}^n$  ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

**Beweis:** „ $\Rightarrow$ “: Sei  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  (oder  $\mathbb{C}^n$ ) kompakt.

Da  $\mathbb{R}^n$  und  $\mathbb{C}^n$  hausdorffsch sind, ist  $K$  nach Korollar 1.14 abgeschlossen. Nach Voraussetzung kann  $K$  mit endlich vielen offenen Kugeln von Radien 1 überdeckt werden  $\Rightarrow K$  ist beschränkt.

„ $\Leftarrow$ “ Sei  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  (oder  $\mathbb{C}^n$ ) beschränkt und abgeschlossen.

Dann gibt es einen Würfel  $W = \underbrace{[-N, N] \times \dots \times [-N, N]}_{n \text{ mal}}$  mit  $A \subseteq W$  bzw. „Polyzyylinder“

$Z = \{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i \leq N \text{ für } i = 1, \dots, n \}$

Nach Korollar 1.13 und Korollar 1.11 ist  $W$  kompakt, also ist  $A$  nach Korollar 1.12 auch kompakt. Genauso ist  $Z$  kompakt, weil

$$\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1 \}$$

homöomorph zu

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| \leq 1 \}$$

ist. ■

## Übungsaufgaben

### Aufgabe 1 (Sierpińskiraum)

Es sei  $X := \{0, 1\}$  und  $\mathfrak{T}_X := \{\emptyset, \{0\}, X\}$ . Dies ist der sogenannte Sierpińskiraum.

- (a) Beweisen Sie, dass  $(X, \mathfrak{T}_X)$  ein topologischer Raum ist.
- (b) Ist  $(X, \mathfrak{T}_X)$  hausdorffsch?
- (c) Ist  $\mathfrak{T}_X$  von einer Metrik erzeugt?

### Aufgabe 2

Es sei  $\mathbb{Z}$  mit der von den Mengen  $U_{a,b} := a + b\mathbb{Z}$  ( $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ) erzeugten Topologie versehen.

Zeigen Sie:

- (a) Jedes  $U_{a,b}$  und jede einelementige Teilmenge von  $\mathbb{Z}$  ist abgeschlossen.
- (b) Die  $U_{a,b}$  bilden eine Basis der Topologie.
- (c)  $\{-1, 1\}$  ist nicht offen.
- (d) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

# Lösungen der Übungsaufgaben

## Lösung zu Aufgabe 1

**Teilaufgabe a)** Es gilt:

- (i)  $\emptyset, X \in \mathfrak{T}_X$ .
- (ii)  $\mathfrak{T}_X$  ist offensichtlich unter Durchschnitten abgeschlossen, d. h. es gilt für alle  $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}_X$  :  $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{T}_X$ .
- (iii) Auch unter beliebigen Vereinigungen ist  $\mathfrak{T}_X$  abgeschlossen, d. h. es gilt für eine beliebige Indexmenge  $I$  und alle  $U_i \in \mathfrak{T}_X$  für alle  $i \in I$  :  $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathfrak{T}_X$

Also ist  $(X, \mathfrak{T}_X)$  ein topologischer Raum.

**Teilaufgabe b)** Wähle  $x = 1, y = 0$ . Dann gilt  $x \neq y$  und die einzige Umgebung von  $x$  ist  $X$ . Da  $y = 0 \in X$  können also  $x$  und  $y$  nicht durch offene Mengen getrennt werden.  $(X, \mathfrak{T}_X)$  ist also nicht hausdorffsch.

**Teilaufgabe c)** Nach Bemerkung 3 sind metrische Räume hausdorffsch. Da  $(X, \mathfrak{T}_X)$  nach (b) nicht hausdorffsch ist, liefert die Kontraposition der Trennungseigenschaft, dass  $(X, \mathfrak{T}_X)$  kein metrischer Raum sein kann.

## Lösung zu Aufgabe 2

Lösung schreiben

# Symbolverzeichnis

$\mathfrak{B}$ Basis einer Topologie.	$A \times B$ Kreuzprodukt zweier Mengen.
$\mathfrak{B}_\delta(x)$ $\delta$ -Kugel um $x$ .	$\mathcal{P}(M)$ Potenzmenge von $M$ .
$\mathfrak{T}$ Topologie.	$A \setminus B$ $A$ ohne $B$ .
$\mathbb{N}$ Natürliche Zahlen.	$A \subseteq B$ Teilmengenbeziehung.
$\mathbb{Z}$ Ganze Zahlen.	$A \subsetneq B$ echte Teilmengenbeziehung.
$\mathbb{Q}$ Rationale Zahlen.	$[x]_\sim$ Äquivalenzklassen von $x$ bzgl. $\sim$ .
$\mathbb{R}$ Reelle Zahlen.	$X/\sim$ $X$ modulo $\sim$ .
$\mathbb{R}^\times$ Multiplikative Einheitengruppe von $\mathbb{R}$ .	$\ x\ $ Norm von $x$ .
$\mathbb{R}^+$ Echt positive reelle Zahlen.	$ x $ Betrag von $x$ .
$\mathbb{C}$ Komplexe Zahlen.	$\mathbf{\text{OE}}$ Ohne Einschränkung.
$\mathbb{P}$ Projektiver Raum.	$\pi_X$ Projektion auf $X$ .
$\overline{M}$ Abschluss der Menge $M$ .	$\langle \cdot, \cdot \rangle$ Skalarprodukt.
$M^\circ$ Inneres der Menge $M$ .	$S^n$ Sphäre.
$\partial M$ Rand der Menge $M$ .	$f^{-1}(M)$ Urbild von $M$ .

# Index

- abgeschlossen, 2
- Abschluss, 3
- Basis, 3
- dicht, 3
- Grenzwert, 7
- Homöomorphismus, 8
- Inneres, 3
- Kern
  - offener, 3
- kompakt, 12
- Limes, 7
- Metrik, 5
  - diskrete, 6
  - SNCF, 6
- offen, 2
- Polyzyylinder, 15
- Produkttopologie, 4
- Projektion
  - stereographische, 9
- Quotiententopologie, 4
- Rand, 3
- Raum
  - hausdorffscher, 7
  - metrischer, 5
  - topologischer, 2
- Sierpińskiraum, 3
- Spurtopologie, 3
- stetig, 8
- Subbasis, 3
- Teilraum, 3
- Topologie
  - diskrete, 2, 6
  - euklidische, 2
  - triviale, 2
  - Zariski, 2, 11, 13
- Torus, ii
- Überdeckung, 13
- Umgebung, 3
- zusammenhängend, 10
- Zusammenhang, 10–12
- Zusammenhangskomponente, 12