

Aufgabe 1

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 14 \\ 3 & 14 & 34 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: Durch Gauß-Elimination die Cholesky-Zerlegung $A = \overline{L}L^T$ berechnen

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 8 & 14 \\ 3 & 14 & 34 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \cdot (-2) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \begin{array}{l} \cdot (-3) \\ \\ \end{array} \\
 \leadsto L^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & A^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 8 & 25 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \cdot (-2) \\ \leftarrow + \\ \end{array} \\
 \leadsto L^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, & A^{(2)} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} =: R \\
 L &= (L^{(2)} \cdot L^{(1)})^{-11} & L &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Nun gilt:

$$A = LR = L(DL^T) \quad (1)$$

$$\Rightarrow A = \underbrace{(LD^{\frac{1}{2}})}_{=: \overline{L}} (D^{\frac{1}{2}}L^T) \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\Rightarrow D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad (4)$$

¹Da dies beides Frobeniusmatrizen sind, kann einfach die negierten Elemente unter der Diagonalmatrix auf die Einheitsmatrix addieren um das Ergebnis zu erhalten

$$\Rightarrow D^{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\bar{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Aufgabe 2

Teilaufgabe i

Es gilt:

$$2x - e^{-x} = 0 \quad (8)$$

$$\Leftrightarrow 2x = e^{-x} \quad (9)$$

$$(10)$$

Offensichtlich ist $g(x) := 2x$ streng monoton steigend und $h(x) := e^{-x}$ streng monoton fallend.

Nun gilt: $g(0) = 0 < 1 = e^0 = h(0)$. Das heißt, es gibt keinen Schnittpunkt für $x \leq 0$.

Außerdem: $g(1) = 2$ und $h(1) = e^{-1} = \frac{1}{e} < 2$. Das heißt, für $x \geq 1$ haben g und h keinen Schnittpunkt.

Da g und h auf $[0, 1]$ stetig sind und $g(0) < h(0)$ sowie $g(1) > h(1)$ gilt, müssen sich g und h im Intervall mindestens ein mal schneiden. Da beide Funktionen streng monoton sind, schneiden sie sich genau ein mal.

Ein Schnittpunkt der Funktion g, h ist äquivalent zu einer Nullstelle der Funktion f . Also hat f genau eine Nullstelle und diese liegt in $[0, 1]$.

Teilaufgabe ii

$$2x - e^{-x} = 0 \quad (11)$$

$$\Leftrightarrow 2x = e^{-x} \quad (12)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \cdot e^{-x} = F_1(x) \quad (13)$$

$$\stackrel{x \in \mathbb{R}^+}{\Rightarrow} \ln(2x) = -x \quad (14)$$

$$\Leftrightarrow x = -\ln(2x) = F_2(x) \quad (15)$$

Gleichung 13 zeigt, dass der Fixpunkt von F_1 mit der Nullstelle von f übereinstimmt.

Gleichung 15 zeigt, dass der Fixpunkt von F_1 mit der Nullstelle von f übereinstimmt. Da es nur in $[0, 1]$ eine Nullstelle gibt (vgl. Teilaufgabe i), ist die Einschränkung von x auf \mathbb{R}^+ irrelevant.

Man sollte F_1 zur Fixpunktiteration verwenden, da $\ln(x)$ nur für $x > 0$ definiert ist. Bei der Iteration kommt man aber schnell in einen Bereich, der nicht erlaubt ist (das erlaubte Intervall ist klein; Rechenungenauigkeit)

F_1 ist auf $[0, 1]$ eine Kontraktion mit Kontraktionszahl $\theta = \frac{1}{2}$:

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ex. ein $\xi \in (a, b)$ mit $0 \leq a < b \leq 1$, sodass gilt:

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = f'(\xi) \quad (16)$$

$$\Leftrightarrow \frac{F(b) - F(a)}{b - a} = -\frac{1}{2}e^{-\xi} \quad (17)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\|F(b) - F(a)\|}{\|b - a\|} = \frac{1}{2} \frac{1}{e^\xi} < \frac{1}{2e^a} \quad (18)$$

$$\Leftrightarrow \|F(b) - F(a)\| < \frac{1}{2e^a} |b - a| \quad (19)$$

$$\Rightarrow \forall x, y \in [0, 1] : |F(x) - F(y)| < \frac{1}{2} |x - y| \quad (20)$$

F_2 ist auf $(0, 1]$ eine Kontraktion mit Kontraktionszahl θ :

$$\| -\ln(2x) + \ln(2y) \| \leq \theta \cdot \|x - y\| \quad (21)$$

$$\Leftrightarrow \left\| \ln\left(\frac{2y}{2x}\right) \right\| \leq \theta \cdot \|x - y\| \quad (22)$$

$$\Leftrightarrow \left\| \ln\left(\frac{y}{x}\right) \right\| \leq \theta \cdot \|x - y\| \quad (23)$$

TODO: Beweis ist nicht mal wirklich angefangen

Gegen F_2 spricht auch, dass \log nur auf \mathbb{R}^+ definiert ist. Das kann bei Rundungsfehlern eventuell zu einem Fehler führen. (vgl. Python-Skript)

Teilaufgabe iii

$$x_{k+1} = x_k - \frac{2x_k - e^{-x_k}}{2 + e^{-x_k}}$$

Laut Wolfram|Alpha ist die Lösung etwa 0.35173371124919582602

Aufgabe 3

f_i	8	3	4	8
x_i	-1	0	1	3

Teilaufgabe i

$$p(x) = \sum_{i=0}^3 f_i \cdot L_i(x) \quad (24)$$

mit

$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} = \dots = \frac{x^3 - 4x^2 + 3x}{-8} \quad (25)$$

$$L_1(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{3} \quad (26)$$

$$L_2(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x}{-4} \quad (27)$$

$$L_3(x) = \frac{x^3 - x}{24} \quad (28)$$

Teilaufgabe ii

Anordnung der dividierten Differenzen im so genannten Differenzenschema:

$$\begin{array}{llll} f[x_0] = f_0 = 8 & & & \\ f[x_1] = 3 & f[x_0, x_1] = \frac{f[x_0] - f[x_1]}{x_0 - x_1} = -5 & & \\ f[x_2] = 4 & 1 & 3 & \\ f[x_3] = 8 & 2 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{array}$$

Also:

$$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1] \cdot (x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \quad (29)$$

$$+ f[x_0, x_1, x_2, x_3] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \quad (30)$$

$$= 8 - 5 \cdot (x - x_0) + 3 \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \quad (31)$$

$$- \frac{2}{3} \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \quad (32)$$

Aufgabe 4

Nach der Substitutionsregel gilt:

$$\int_{x_2}^{x_3} f(x) dx = (x_3 - x_2) \cdot \int_0^1 f(x_2 + \tau(b - a)) d\tau$$

Wenn f ein Polynom vom Grad q war, so ist auch das neue Integral ein Polynom vom Grad q .

Ein Polynom, das vier Punkte interpoliert, hat maximal Grad 3. Da wir das Integral über dieses Polynom im Bereich $[x_2, x_3]$ exakt berechnen sollen, muss die Quadraturformel vom Grad $p = 4$ sein.

TODO

Aufgabe 5

Das explizite Euler-Verfahren dient der numerischen Lösung eines Anfangswertproblems (Differentialgleichungen).

Wir haben das nicht in der Vorlesung gemacht, also wird das wohl nicht relevant sein.