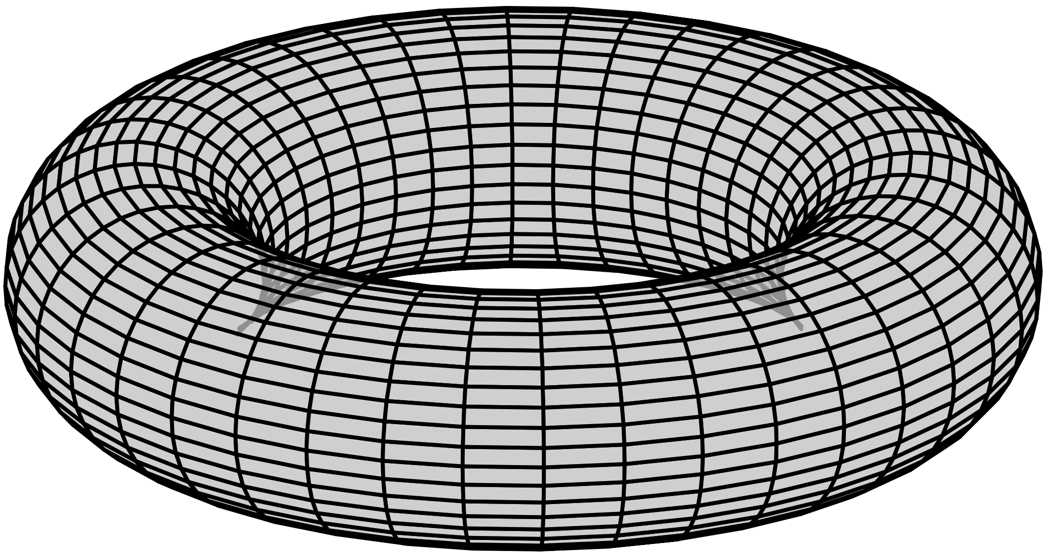
Geometrie und Topologie



Siehe tinyurl.com/GeoTopo

13. Dezember 2013

Vorwort

Dieses Skript wird/wurde im Wintersemester 2013/2014 geschrieben. Es beinhaltet Vorlesungsnotizen von Studenten zur Vorlesung von Prof. Dr. Herrlich.

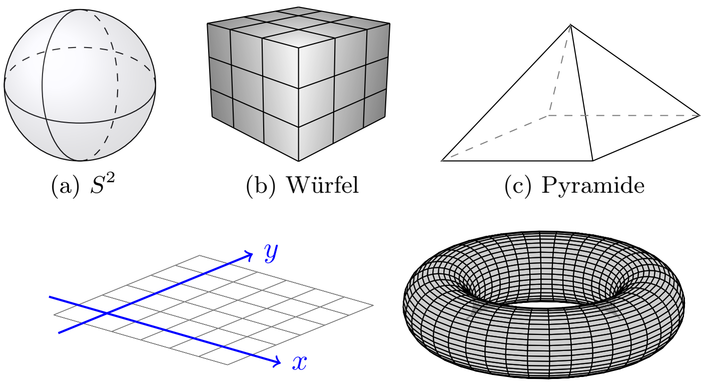
Es darf jeder gerne Verbesserungen einbringen!

Die Kurz-URL des Projekts lautet tinyurl.com/GeoTopo.

An dieser Stelle möchte ich noch Herrn Prof. Dr. Herrlich für einige Korrekturvorschläge und einen gut strukturierten Tafelanschrieb danken, der als Vorlage für dieses Skript diente. Vielen Dank auch an Frau Lenz, die es mir erlaubt hat, ihre Übungsaufgaben und Lösungen zu benutzen.

Was ist Topologie?

Die Kugeloberfläche S^2 lässt sich durch strecken, stauchen und umformen zur Würfeloberfläche oder der Oberfläche einer Pyramide verformen, aber nicht zum $\mathbb{R}^2$ oder zu einem Torus T^2. Für den $\mathbb{R}^2$ müsste man die Oberfläche unendlich ausdehnen und für einen Torus müsste man ein Loch machen.



(a) S^2 (b) Würfel (c) Pyramide

(d) $\mathbb{R}^2$ (e) T^2

Abbildung 0.1: Beispiele für verschiedene Formen

Inhaltsverzeichnis

1 Topologische Grundbegriffe

1.1 Topologische Räume

Definition 1

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X, \mathfrak{T})$ bestehend aus einer Menge X und $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften

(i) $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$

(ii) Sind $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}$, so ist $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{T}$

(iii) Ist I eine Menge und $U_i \in \mathfrak{T}$ für jedes $i \in I$, so ist $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathfrak{T}$

Die Elemente von $\mathfrak{T}$ heißen **offene Teilmengen** von X.

$A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Es gibt auch Mengen, die weder abgeschlossen, noch offen sind wie z. B. $[0, 1)$. Auch gibt es Mengen, die sowohl abgeschlossen als auch offen sind.

Korollar 1.1 (Mengen, die offen und abgeschlossen sind, existieren)

Betrachte $\emptyset$ und X mit der „trivialen Topologie“ $\mathfrak{T}_{\text{triv}} = \{ \emptyset, X \}$.

Es gilt: $X \in \mathfrak{T}$ und $\emptyset \in \mathfrak{T}$, d. h. X und $\emptyset$ sind offen. Außerdem $X^C = X \setminus X = \emptyset \in \mathfrak{T}$ und $X \setminus \emptyset = X \in \mathfrak{T}$, d. h. X und $\emptyset$ sind als Komplement offener Mengen abgeschlossen. ■

Beispiel 1

1) $X = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik.

$$U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen} \Leftrightarrow \text{für jedes } x \in U \text{ gibt es } r > 0, \\ \text{sodass } \mathfrak{B}_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < r \} \subseteq U$$

Also: $\mathfrak{T} = \{ M \subseteq X \mid M \text{ ist offene Kugel} \}$. Diese Topolgie wird auch „Standardtopologie des $\mathbb{R}^n$“ genannt.

2) Jeder metrische Raum (X, d) ist auch ein topologischer Raum.

3) Für eine Menge X heißt $\mathfrak{T} = \mathcal{P}(X)$ „diskrete Topologie“.

4) $X := \mathbb{R}, \mathfrak{T}_Z := \{ U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ endlich} \} \cup \{ \emptyset \}$ heißt „Zariski-Topologie“
Beobachtungen:

- $U \in \mathfrak{T}_Z \Leftrightarrow \exists f \in \mathbb{R}[X]$, sodass $\mathbb{R} \setminus U = V(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0 \}$
- Es gibt keine disjunkten offenen Mengen in $\mathfrak{T}_Z$.

5) $X := \mathbb{R}^n, \mathfrak{T}_Z = \{U \subseteq \mathbb{R}^n | \text{Es gibt Polynome } f_1, \dots, f_r \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n] \text{ sodass } \mathbb{R}^n \setminus U = V(f_1, \dots, f_r)\}$

6) $X := \{ 0, 1 \}, \mathfrak{T} = \{ \emptyset, \{ 0, 1 \}, \{ 0 \} \}$ heißt „Sierpińskiraum“.
$\emptyset, \{ 0, 1 \}, \{ 1 \}$ sind dort alle abgeschlossenen Mengen.

Definition 2
Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und $x \in X$.

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **Umgebung** von x, wenn es ein $U_0 \in \mathfrak{T}$ gibt mit $x \in U_0$ und $U_0 \subseteq U$.

Definition 3
Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge.

a) $M^\circ := \{ x \in M \mid M \text{ ist Umgebung von } x \} = \bigcup_{\substack{U \subseteq M \\ U \in \mathfrak{T}}} U$ heißt **Inneres** oder **offener Kern** von M.

b) $\overline{M} := \bigcap_{\substack{M \subseteq A \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$ heißt **abgeschlossene Hülle** oder **Abschluss** von M.

c) $\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$ heißt **Rand** von M.

d) M heißt **dicht** in X, wenn $\overline{M} = X$ ist.

Beispiel 2
1) Sei $X = \mathbb{R}$ mit euklidischer Topologie und $M = \mathbb{Q}$. Dann gilt: $\overline{M} = \mathbb{R}$ und $M^\circ = \emptyset$

2) Sei $X = \mathbb{R}$ und $M = (a, b)$. Dann gilt: $\overline{M} = [a, b]$

3) Sei $X = \mathbb{R}, \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_Z$ und $M = (a, b)$. Dann gilt: $\overline{M} = \mathbb{R}$

Definition 4
Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum.

a) $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$ heißt **Basis** der Topologie $\mathfrak{T}$, wenn jedes $U \in \mathfrak{T}$ Vereinigung von Elementen aus $\mathfrak{B}$ ist.

b) $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$ heißt **Subbasis**, wenn jedes $U \in \mathfrak{T}$ Vereinigung von endlich vielen Durchschnitten von Elementen aus $\mathfrak{B}$ ist.

Beispiel 3
Gegeben sei $X = \mathbb{R}^n$ mit euklidischer Topologie $\mathfrak{T}$. Dann ist

$$\mathfrak{B} = \{ B_r(x) \mid r \in \mathbb{Q}_{>0}, x \in \mathbb{Q}^n \}$$

ist eine abzählbare Basis von $\mathfrak{T}$.

Bemerkung 1
Sei X eine Menge und $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann gibt es genau eine Topologie $\mathfrak{T}$ auf X, für die $\mathfrak{B}$ Subbasis ist.

Definition 5
Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$.
$\mathfrak{T}_Y := \{ U \cap Y \mid U \in \mathfrak{T} \}$ ist eine Topologie auf Y.

$\mathfrak{T}_Y$ heißt **Spurtopologie** und $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ heißt ein **Teilraum** von $(X, \mathfrak{T})$

Definition 6

Seien X_1, X_2 topologische Räume.
$U \subseteq X_1 \times X_2$ sei offen, wenn es zu jedem $x = (x_1, x_2) \in U$ Umgebungen U_i um x_i mit $i = 1, 2$ gibt, sodass $U_1 \times U_2 \subseteq U$ gilt.

$\mathfrak{T} = \{\, U \subseteq X_1 \times X_2 \mid U \text{ offen} \,\}$ ist eine Topologie auf $X_1 \times X_2$. Sie heißt **Produkttopologie**.
$\mathfrak{B} = \{\, U_1 \times U_2 \mid U_i \text{ offen in } X_i, i = 1, 2 \,\}$ ist eine Basis von $\mathfrak{T}$.

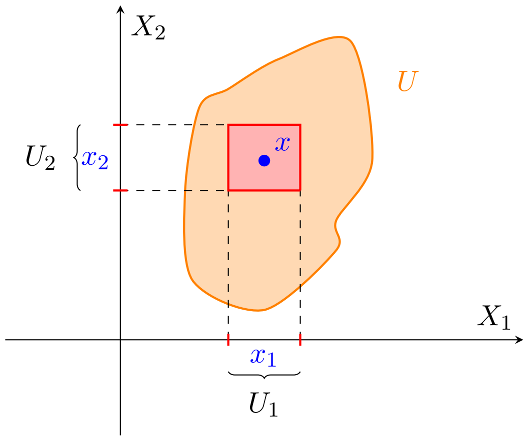


Abbildung 1.1: Zu $x = (x_1, x_2)$ gibt es Umgebungen U_1, U_2 mit $U_1 \times U_2 \subseteq U$

Beispiel 4

1) $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ mit euklidischer Topologie.
$\Rightarrow$ Die Produkttopologie auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ stimmt mit der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}^2$ überein.

2) $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ mit Zariski-Topologie. $\mathfrak{T}$ Produkttopologie auf $\mathbb{R}^2$: $U_1 \times U_2$
(Siehe Abb. 1.2)

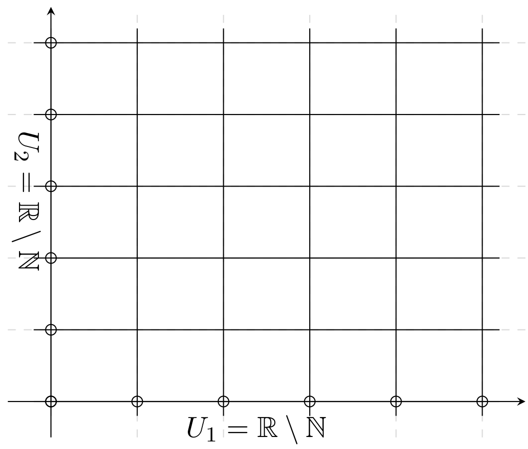


Abbildung 1.2: Zariski-Topologie auf $\mathbb{R}^2$

Definition 7

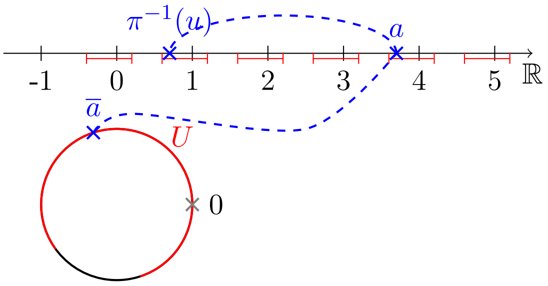
Sei X topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, $\overline{X} = X/_\sim$ sei die Menge der Äquivalenzklassen, $\pi : x \to \overline{x}, \quad x \mapsto [x]_\sim$.

$$\mathfrak{T}_{\overline{X}} := \{\, U \subseteq \overline{X} \mid \pi^{-1}(U) \in \mathfrak{T}_X \,\}$$

$(\overline{X}, \mathfrak{T}_{\overline{X}})$ heißt **Quotiententopologie**.

Beispiel 5

$X = \mathbb{R}, a \sim b :\Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$



$0 \sim 1$, d. h. $[0] = [1]$

Beispiel 6

Sei $X = \mathbb{R}^2$ und $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}$ und $y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}$.

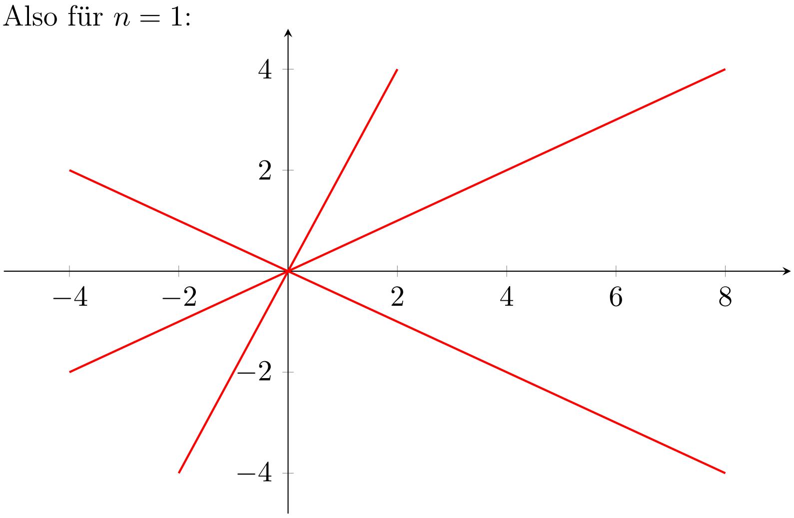
$X/_\sim$ ist ein Torus.

Beispiel 7

$$X = \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{ 0 \}, \quad x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^\times \text{ mit } y = \lambda x$$
$$\Leftrightarrow x \text{ und } y \text{ liegen auf der gleichen Ursprungsgerade}$$

$$\overline{X} = \mathcal{P}^n(\mathbb{R})$$

Also für $n = 1$:



1.2 Metrische Räume

Definition 8

Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ heißt **Metrik**, wenn gilt:

(i) Definitheit: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$

(ii) Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$

(iii) Dreiecksungleichung: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(x+z) \quad \forall x,y,z \in X$

Das Paar (X,d) heißt ein **metrischer Raum**.

Bemerkung 2

Sei (X,d) ein metrischer Raum und

$$\mathfrak{B}_r(x) := \{\, y \in X \mid d(x,y) < r \,\} \text{ für } x \in X, r \in \mathbb{R}^+$$

$\mathfrak{B}$ ist Basis einer Topologie auf X.

Beispiel 8

Sei V ein euklidischer oder hermiteischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Dann wird V durch $d(x,y) := \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$ zum metrischen Raum.

Beispiel 9 (diskrete Metrik)

Sei X eine Menge. Dann heißt

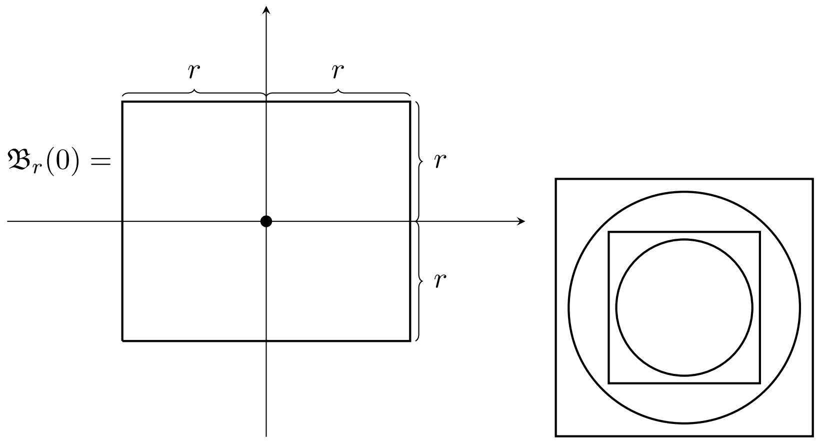
$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

die **diskrete Metrik**. Die Metrik d induziert die **diskrete Topologie**.

Beispiel 10

$X = \mathbb{R}^2$ und $d\left((x_1,y_1),(x_2,y_2)\right) := \max(\|x_1 - x_2\|, \|y_1 - y_2\|)$ ist Metrik.

Beobachtung: d erzeugt die euklidische Topologie.

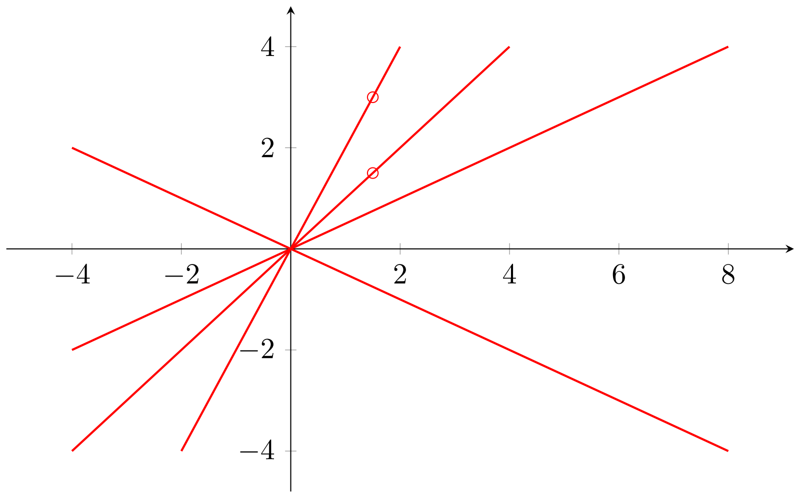


(a) $\mathfrak{B}_r(0)$ (b) Euklidische Topologie

Abbildung 1.3: Veranschaulichungen zur Metrik d

Beispiel 11 (SNCF-Metrik[1])

$X = \mathbb{R}^2$



Definition 9

Ein topologischer Raum X heißt **hausdorffsch**, wenn es für je zwei Punkte $x \neq y$ in X Umgebungen U_x um x und U_y um y gibt, sodass $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Bemerkung 3 (Trennungseigenschaft)

Metrische Räume sind hausdorffsch, da

$$d(x,y) > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \mathfrak{B}_\varepsilon(x) \cap \mathfrak{B}_\varepsilon(y) = \emptyset$$

Ein Beispiel für einen topologischen Raum, der nicht hausdorfsch ist, ist $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_Z)$.

Bemerkung 4

Seien X, X_1, X_2 Hausdorff-Räume.

a) Jeder Teilraum um X ist Hausdorffsch.

b) $X_1 \times X_2$ ist Hausdorffsch.

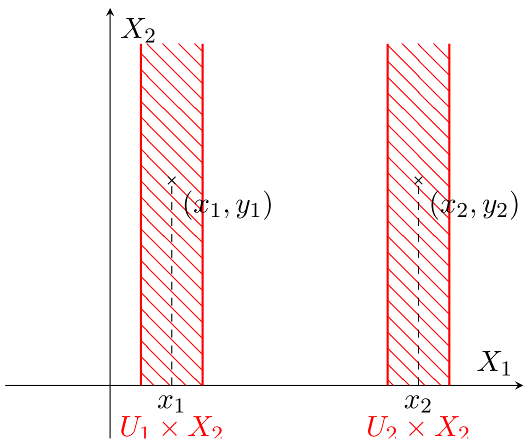


Abbildung 1.4: Wenn X_1, X_2 hausdorffsch sind, dann auch $X_1 \times X_2$

Definition 10

Sei X ein topologischer Raum und $(x)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X. $x \in X$ heißt **Grenzwert** oder **Limes** von (x_n), wenn es für jede Umgebung U von x ein n_0 gibt, sodass $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$.

Korollar 1.2

Ist X hausdorffsch, so hat jede Folge in X höchstens einen Grenzwert.

Beweis: Sei (x_n) eine konvergierende Folge und x und y Grenzwerte der Folge.

Nach Voraussetzung gibt es Umgebungen U_x von x und U_y von y mit $U_x \cap U_y = \emptyset$. Es existiert ein n_0 mit $x_n \in U_x \cap U_y$ für alle $n \geq n_0 \Rightarrow x = y$ ■

1.3 Stetigkeit

Definition 11
Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

a) f heißt **stetig**, wenn für jedes offene $U \subseteq Y$ auch $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen ist.

b) f heißt **Homöomorphismus**, wenn f stetig ist und es eine stetige Abbildung $g : Y \to X$ gibt, sodass $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Korollar 1.3[2]
Seien X, Y metrische Räume und $f \colon X \to Y$ eine Abbildung.

Dann gilt: f ist stetig $\Leftrightarrow$ zu jedem $x \in X$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta(x, \varepsilon) > 0$, sodass für alle $y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$ gilt $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Beweis: „$\Rightarrow$": Sei $x \in X, \varepsilon > 0$ gegeben und $U := \mathfrak{B}_\varepsilon(f(x))$.
Dann ist U offen in Y.
$\xRightarrow{11.a} f^{-1}(U)$ ist offen in X. Dann ist $x \in f^{-1}(U)$.
$\Rightarrow \exists \delta > 0$, sodass $\mathfrak{B}_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U)$
$\Rightarrow f(\mathfrak{B}_\delta(x)) \subseteq U$
$\Rightarrow \{ y \in X \mid d_X(x, y) < \delta \} \Rightarrow$ Beh.

„$\Leftarrow$": Sei $U \subseteq Y$ offen, $X \in f^{-1}(U)$.
Dann gibt es $\varepsilon > 0$, sodass $\mathfrak{B}_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$
$\xRightarrow{\text{Vor.}}$ Es gibt $\delta > 0$, sodass $f(\mathfrak{B}_\delta(x)) \subseteq \mathfrak{B}_\varepsilon(f(x))$
$\Rightarrow \mathfrak{B}_\delta(x) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{B}_\varepsilon(f(x))) \subseteq f^{-1}(U)$ ■

Bemerkung 5
Eine Ableitung $f : X \to Y$ von topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq Y$ gilt: $f^{-1}(A) \subseteq X$ ist abgeschlossen.

Beispiel 12

1) Für jeden topologischen Raum X gilt: $\mathrm{Id}_X : X \to X$ ist Homöomorphismus.

2) Ist Y trivialer topologischer Raum, d. h. $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{\text{triv}}$, so ist jede Abbildung $f : X \to Y$ stetig.

3) Ist X diskreter topologischer Raum, so ist $f : X \to Y$ stetig für jeden topologischen Raum Y und jede Abbildung f.

4) Sei $X = [0, 1), Y = S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1 \}$ und $f(t) = e^{2\pi i t}$ Die Umkehrabbildung g ist nicht stetig, da $g^{-1}(U)$ nicht offen ist (vgl. Abb. 1.5).

Korollar 1.4
Seien X, Y, Z topologische Räume, $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetige Abbildungen.

Dann ist $g \circ f : X \to Z$ stetig.

[2] Im Grunde wird die Äquivalenz von Stetigkeit im Sinne der Analysis und Topologie auf metrischen Räumen gezeigt.

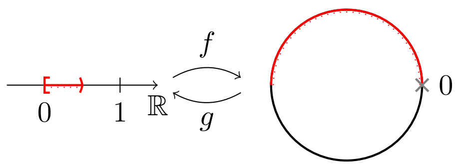


Abbildung 1.5: Beispiel einer stetigen Funktion f, deren Umkehrabbildung g nicht steitg ist.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

Beweis: Sei $U \subseteq Z$ offen $\Rightarrow (g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$. $g^{-1}(U)$ ist offen in Y weil g stetig ist, $f^{-1}(g^{-1}(U))$ ist offen in X, weil f stetig ist. ■

Bemerkung 6

a) Für jeden topologischen Raum ist $\text{Homöo}(X) := \{ f : X \to X \mid f \text{ ist Homöomorphismus} \}$ eine Gruppe.

b) Jede Isometrie $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen ist ein Homöomorphismus.

c) $\text{Isom}(X) := \{ f : X \to X \mid f \text{ ist Isometrie} \}$ ist eine Untergruppe von $\text{Homöo}(X)$ für jeden metrischen Raum X.

Korollar 1.5

Seien X, Y topologische Räume. $\pi_X : X \times Y \to X$ und $\pi_Y : X \times Y \to Y$ die Projektionen

$$\pi_X : (x, y) \mapsto x \text{ und } \pi_Y : (x, y) \mapsto y$$

Wird $X \times Y$ mit der Produkttopologie versehen, so sind π_X und π_Y stetig.

Beweis: Sei $U \subseteq X$ offen $\Rightarrow \pi_x^{-1}(U) = U \times Y$ ist offen in $X \times Y$. ■

Korollar 1.6

Sei X ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, $\overline{X} = X/_\sim$ der Bahnenraum versehen mit der Quotiententopologie, $\pi : X \to \overline{X}$, $x \mapsto [x]_\sim$.

Dann ist π stetig.

Beweis: Nach Definition ist $U \subseteq \overline{X}$ offen $\Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \subseteq X$ offen. ■

Beobachtung: Die Quotiententopologie ist die feinste Topologie, sodass π stetig wird.

Beispiel 13 (Stereographische Projektion)

$\mathbb{R}^n$ und $S^n \setminus \{ N \}$ sind homöomorph für beliebiges $N \in S^n$. Es gilt:

$$\begin{aligned} S^n &= \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \|x\| = 1 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 \right\} \end{aligned}$$

O. B. d. A. sei $N = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Gerade durch N und P schneidet die Ebene H in genau einem Punkt $\hat{P}$. P wird auf $\hat{P}$ abgebildet.

$$\begin{aligned} f: & S^n \setminus \{ N \} \to \mathbb{R}^n \\ P \mapsto & \overbrace{L_P \cap H}^{\text{genau ein Punkt}} \end{aligned}$$

wobei $\mathbb{R}^n = H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x_{n+1} = 0 \right\}$ und L_P die Gerade in $\mathbb{R}^{n+1}$ durch N und P ist.

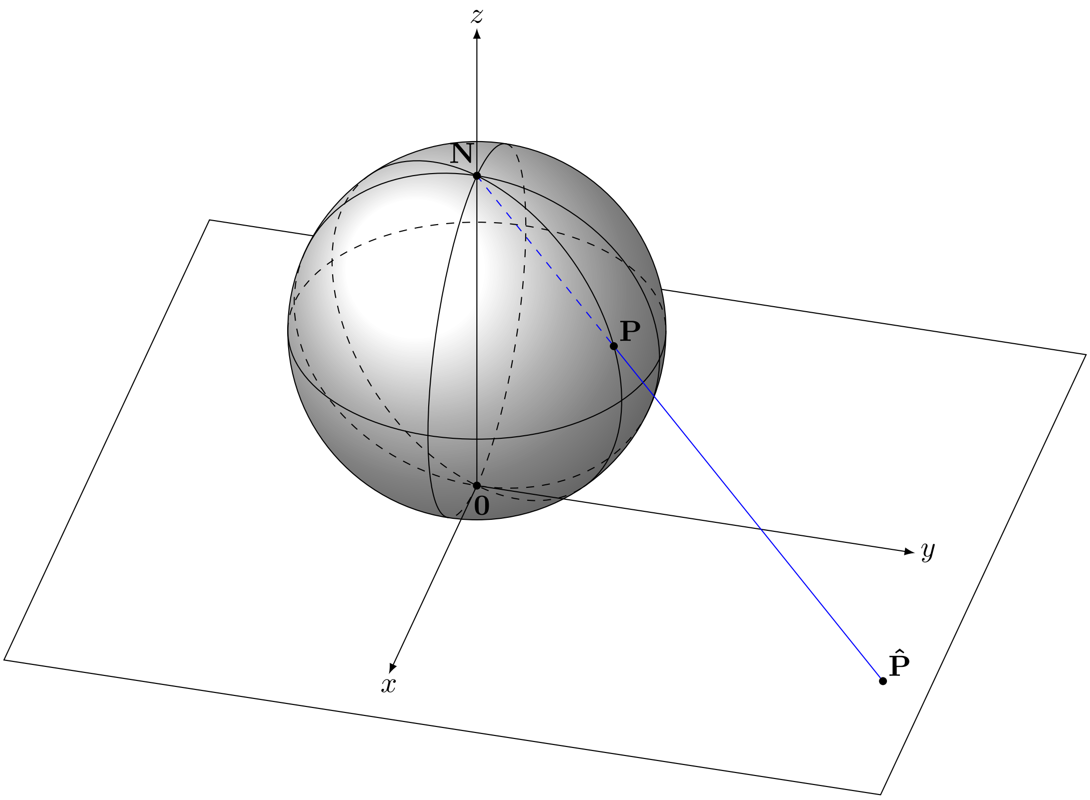


Abbildung 1.6: Visualisierung der stereographischen Projektion

Sei $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$, so ist $x_{n+1} < 1$, also ist L_P nicht parallel zu H. Also schneiden sich L_P und H in genau einem Punkt $\hat{P}$.

Es gilt: f ist bijektiv und die Umkehrabbildung ist ebenfalls stetig.

1.4 Zusammenhang

Definition 12

Ein Raum X heißt **zusammenhängend**, wenn es keine offenen, nichtleeren Teilmengen U_1, U_2 von X gibt mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $U_1 \cup U_2 = X$.

Bemerkung 7

X ist zusammenhängend $\Leftrightarrow$ Es gibt keine abgeschlossenen, nichtleeren Teilmengen A_1, A_2 mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ und $A_1 \cup A_2 = X$.

Bemerkung 8

Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt zusammenhängend, wenn Y als topologischer Raum mit der Teilraumtopologie zusammenhängend ist.

Beispiel 14 (Zusammenhang von Räumen)

1) $\mathbb{R}^n$ ist mit der euklidischen Topologie zusammenhängend, denn:

   Annahme: $\mathbb{R}^n = U_1 \cup U_2$ mit U_i offen, $U_i \neq \emptyset$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ existieren.

   Sei $x \in U_1, y \in U_2$ und $[x, y]$ die Strecke zwischen x und y. Dann ist $U_1 \cap [x, y]$ die Vereinigung von offenen Intervallen. Dann gibt es $z \in [x, y]$ mit $z \in \partial(U_1 \cap [x, y])$, aber $z \notin U_1 \Rightarrow z \in U_2$. In jeder Umgebung von z liegt ein Punkt von $U_1 \Rightarrow$ Widerspruch zu U_2 offen.

2) $\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$ ist nicht zusammenhängend, denn $\mathbb{R} \setminus \{ 0 \} = \mathbb{R}_{<0} \cup \mathbb{R}_{>0}$

3) $\mathbb{R}^2 \setminus \{ 0 \}$ ist zusammenhängend.

4) $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$ ist nicht zusammenhängend, da $(\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_{<\sqrt{2}}) \cup (\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_{>\sqrt{2}}) = \mathbb{Q}$

5) $\{ x \}$ ist zusammenhängend für jedes $x \in X$, wobei X ein topologischer Raum ist.

6) $\mathbb{R}$ mit Zariski-Topologie ist zusammenhängend

Korollar 1.7

Sei X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$ zusammenhängend. Dann ist auch $\overline{A}$ zusammenhängend.

Beweis: Annahme: $\overline{A} = A_1 \cup A_2,\ A_i$ abgeschlossen, $\neq \emptyset,\ A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$$\Rightarrow A = \underbrace{\underbrace{(A \cap A_1)}_{\text{abgeschlossen}} \cup \underbrace{(A \cap A_2)}_{\text{abgeschlossen}}}_{\text{disjunkt}}$$

Wäre $A \cap A_1 = \emptyset$
$\Rightarrow A \subseteq A_2$
$\Rightarrow \overline{A} \subseteq A_2$
$\Rightarrow A_1 = \emptyset$
$\Rightarrow$ Widerspruch zu $A_1 \neq \emptyset$
$\Rightarrow A \cap A_1 \neq \emptyset$ und analog $A \cap A_2 \neq \emptyset$
$\Rightarrow$ Widerspruch zu A ist zusammenhängend ■

Korollar 1.8

Sei X topologischer Raum, $A, B \subseteq X$ zusammenhängend.

Ist $A \cap B \neq \emptyset$, dann ist $A \cup B$ zusammenhängend.

Beweis: Sei $A \cup B = U_1 \cup U_2, U_i \neq \emptyset$ offen, disjunkt

$$\xRightarrow{\text{o. B. d. A.}} A = (A \cap U_1) \cup (A \cap U_2) \text{ offen, disjunkt}$$
$$\xRightarrow{A \text{ zhgd.}} A \cap U_1 = \emptyset$$
$$\xRightarrow{A \cap B \neq \emptyset} U_1 \subseteq B$$
$$B = \underbrace{(B \cap U_1)}_{=U_1} \cup \underbrace{(B \cap U_2)}_{=\emptyset} \text{ ist unerlaubte Zerlegung}$$

■

Definition 13

Sei X ein topologischer Raum.

Für $x \in X$ sei

$$Z(x) := \bigcup_{\substack{A \subseteq X \text{zhgd.} \\ X \in A}} A$$

$Z(x)$ heißt **Zusammenhangskomponente**.

Korollar 1.9

Sei X ein topologischer Raum. Dann gilt:

a) $Z(X)$ ist die größte zusammehängede Teilmenge von X, die x enthält.

b) $Z(X)$ ist abgeschlossen.

c) X ist disjunkte Vereinigung von Zusammenhangskomponenten.

Beweis:

a) Sei $Z(x) = A_1 \cup A_2$ mit $A_i \neq \emptyset$ abgeschlossen, disjunkt.

O. B. d. A. sei $x \in A_1$ und $y \in A_2$. y liegt in einer zusammehängenden Teilmenge A, die auch x enthält. $\Rightarrow A = \underbrace{(A \cap A_1)}_{\ni x} \cup \underbrace{(A \cap A_2)}_{\ni y}$ ist unerlaubte Zerlegung.

b) Nach Korollar 1.7 ist $\overline{Z(x)}$ zusammenhängend $\Rightarrow \overline{Z(x)} \subseteq Z(x) \Rightarrow Z(x) = \overline{Z(x}$

c) Ist $Z(y) \cap Z(x) \neq \emptyset \overset{1.8}{\Longrightarrow} Z(y) \cup Z(x)$ ist zusammenhängend.

$$\begin{aligned} \Rightarrow Z(x) \cup Z(y) &\subseteq Z(x) \Rightarrow Z(y) \subseteq Z(x) \\ &\subseteq Z(y) \Rightarrow Z(x) \subseteq Z(y) \end{aligned}$$

■

Korollar 1.10

Sei $f : X \to Y$ stetig. Ist $A \subseteq X$ zusammenhängend, so ist $f(A) \subseteq y$ zusammenhängend.

Beweis: Sei $f(A) = U_1 \cup U_2, U_i \neq \emptyset$, offen, disjunkt.

$\Rightarrow f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2)$

$\Rightarrow A = \underbrace{(A \cap f^{-1}(U_1))}_{\neq \emptyset} \cup \underbrace{(A \cap f^{-1}(U_2))}_{\neq \emptyset}$ ■

1.5 Kompaktheit

Definition 14
Sei X eine Menge und $T \subseteq \mathcal{P}(X)$.

T heißt eine **Überdeckung** von X, wenn gilt:

$$\forall x \in X : \exists M \in T : x \in M$$

Definition 15
Ein topologischer Raum X heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung $\mathfrak{U}$ von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

$$\mathfrak{U} = \{ U_i \}_{i \in I}, \quad U_i \text{ offen in } X, \quad \bigcup_{i \in I} U_i = X$$

Korollar 1.11
$I = [0, 1]$ ist kompakt bezüglich der euklidischen Topologie.

Beweis: Sei $(U_i)_{i \in J}$ eine offene Überdeckung von I.

Der Beweis ist komisch. Das würde ich gerne mit jemanden durchsprechen.

z. Z.: Es gibt ein $\delta > 0$, sodass jedes Teilintervall der Länge δ von I in einem der U_i enthalten ist.

Angenommen, es gibt kein solches δ. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Intervall $I_n \subseteq [0, 1]$ der Länge $1/n$ sodass $I_n \nsubseteq U_i$ für alle $i \in I$.

Sei x_n der Mittelpunkt von I_n. Die Folge (x_n) hat einen Häufungspunkt $x \in [0, 1]$. Dann gibt es $i \in I$ mit $x \in U_i$. Da U_i offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U_i$. Dann gibt es n mit $1/n < \varepsilon/2$ und $|x - x_n| < \varepsilon/2$, also $I_n \subseteq (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U_i$

$\Rightarrow$ Widerspruch

Dann überdecke $[0, 1]$ mit endlich vielen Intervallen $I_1, \dots, I_d$ der Länge δ. Jedes I_j ist in U_{ij} enthalten.

$\Rightarrow U_{j_1}, \dots, U_{j_d}$ ist endliche Teilüberdeckung von U ■

Beispiel 15

1) $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt.
2) $(0, 1)$ ist nicht kompakt.
   $U_n = (1/n, 1 - 1/n) \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = (0, 1)$
3) $\mathbb{R}$ mit der Zariski-Topologie ist kompakt und jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist es auch.

Korollar 1.12
Sei X kompakter Raum, $A \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist A kompakt.

Beweis: Sei $(V_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von A.

Dann gibt es für jedes $i \in I$ eine offene Teilmenge $U_i \subseteq X$ mit $V_i = U_i \cap A$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i \\
&\Rightarrow \mathfrak{U} = \{\, U_i \mid i \in I \,\} \cup \{\, X \setminus A \,\} \text{ ist offene Überdeckung von } X \\
&\xRightarrow{X \text{ kompakt}} \text{ es gibt } i_1, \dots, i_n \in I, \text{ sodass } \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j} \cup (X \setminus A) = X \\
&\Rightarrow \left(\bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j} \cup (X \setminus A) \right) \cap A = A \\
&\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{n} \underbrace{(U_{i_j} \cap A)}_{=V_{i_j}} \cup \underbrace{((X \setminus A) \cap A)}_{=\emptyset} = A \\
&\Rightarrow V_{i_1}, \dots, V_{i_n} \text{ überdecken } A
\end{aligned}$$

■

Korollar 1.13
Seien X, Y kompakte topologische Räume. Dann ist $X \times Y$ mit der Produkttopologie kompakt.

Beweis: Sei $(W_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von $X \times Y$. Für jedes $(x, y) \in X \times Y$ gibt es offene Teilmengen $U_{x,y}$ von X und $V_{x,y}$ von Y sowie ein $i \in I$, sodass $U_{x,y} \times V_{x,y} \subseteq W_i$.

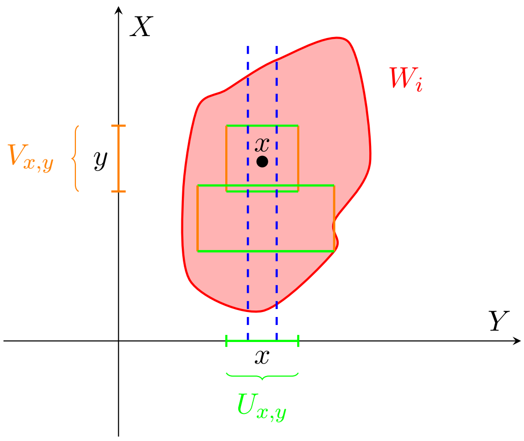


Abbildung 1.7: Die blaue Umgebung ist Schnitt vieler Umgebungen

Die offenen Mengen $U_{x_0,y} \times V_{x_0,y}$ für festes x_0 und alle $y \in Y$ überdecken $\{\, x_0 \,\} \times y$. Da Y kompakt ist, ist auch $\{\, x_0 \,\} \times Y$ kompakt. Also gibt es $y_1, \dots, y_{m(x_0)}$ mit $\bigcup_{i=1}^{m(x_0)} U_{x_0,y_i} \times V_{x_0,y_i} \supseteq \{\, x_0 \,\} \times Y$.

Sei $U_{x_0} := \bigcap_{i=1}^{m(x)} U_{x_0,y_i}$. Da X kompakt ist, gibt es $x_1, \dots, x_n \in X$ mit $\bigcup_{j=1}^{n} U_{x_j} = X$

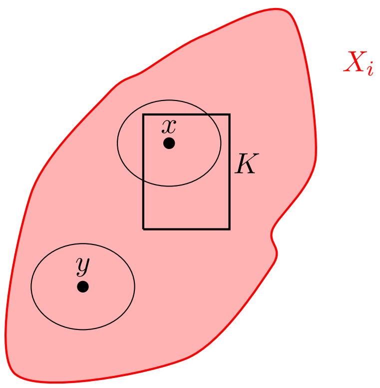
$\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{k} \bigcup_{i=1}^{m(x_j)} \underbrace{(U_{x_j,y_i} \times V_{x_j,y_i})}_{\text{Ein grün-oranges Kästchen}} \supseteq X \times Y$

$\Rightarrow \bigcup_j \bigcup_i W_i(x_j, y_i) = X \times Y$ ■

Korollar 1.14
Sei X ein Hausdorffraum und $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist K abgeschlossen.

Beweis: z. Z.: Komplement ist offen

Ist $X = K$, so ist K abgeschlossen in X. Andernfalls sei $y \in X \setminus K$. Für jedes $x \in K$ seien U_x bzw. V_y Umgebungen von x bzw. von y, sodass $U_x \cap V_y = \emptyset$.



Da K kompakt ist, gibt es endlich viele $x_1, \ldots, x_n \in K$, sodass $\bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i} \supseteq K$.

$$\begin{aligned}
&\text{Sei } V := \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i} \\
&\Rightarrow V \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \right) = \emptyset \\
&\Rightarrow V \cap K = \emptyset \\
&\Rightarrow V \text{ ist Überdeckung von } y \text{, die ganz in } X \setminus K \text{ enthalten ist.} \\
&\Rightarrow X \setminus K \text{ ist offen}
\end{aligned}$$

Damit ist K abgeschlossen. ■

Korollar 1.15
Seien X, Y topologische Räume, $f : X \to Y$ stetig. Ist $K \subseteq X$ kompakt, so ist $f(K) \subseteq Y$ kompakt.

Beweis: Sei $(V_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von $f(K)$
$\xRightarrow{f \text{ stetig}} (f^{-1}(V_i))_{i \in I}$ ist offene Überdeckung von K
$\xRightarrow{\text{Kompakt}}$ es gibt $i_1, \ldots, i_n$, sodass $f^{-1}(V_{i_1}), \ldots, f^{-1}(V_{i_n})$ Überdeckung von K ist.
$\Rightarrow f(f^{-1}(V_{i_1})), \ldots, f(f^{-1}(V_{i_n}))$ überdecken $f(K)$.

Es gilt: $f(f^{-1}(V)) = V \cap f(X)$ ■

Satz 1.16 (Heine-Borel)
Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$) kompakt.

Da $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ hausdorffsch sind, ist K nach Korollar 1.14 abgeschlossen. Nach Voraussetzung kann K mit endlich vielen offenen Kugeln von Radien 1 überdeckt werden $\Rightarrow K$ ist beschränkt.

„$\Leftarrow$“ Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$) beschränkt und abgeschlossen.

Dann gibt es einen Würfel $W = \underbrace{[-N, N] \times \dots \times [-N, N]}_{n \text{ mal}}$ mit $A \subseteq W$ bzw. „Polyzylinder“ $Z = \{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i \leq N \text{ für } i = 1, \dots, n \}$

Nach Korollar 1.13 und Korollar 1.11 ist W kompakt, also ist A nach Korollar 1.12 auch kompakt. Genauso ist Z kompakt, weil

$$\{ z \in \mathbb{C} \| z| \leq 1 \}$$

homöomorph zu

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| \leq 1 \}$$

ist. ■

1.6 Wege und Knoten

Definition 16

Sei X ein topologischer Raum.

a) Ein **Weg** in X ist eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \to X$.

b) γ heißt **geschlossen**, wenn $\gamma(1) = \gamma(0)$ gilt.

c) γ heißt **einfach**, wenn $\gamma|_{[0,1]}$ injektiv ist.

Beispiel 16

Ist X diskret, so ist jeder Weg konstant, d. h. von der Form

$$\forall x \in [0, 1] : \gamma(x) = c, \quad c \in X$$

Denn $\gamma([0, 1])$ ist zusammenhängend für jeden Weg γ.

Definition 17

Ein topologischer Raum X heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ einen Weg $\gamma : [0, 1] \to X$ gibt mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

Korollar 1.17

Sei X ein topologischer Raum.

(i) X ist wegzusammenhängend $\Rightarrow X$ ist zusammenhängend

(ii) X ist wegzusammenhängend $\not\Leftarrow X$ ist zusammenhängend

Beweis:

(i) Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum, A_1, A_2 nichtleere, disjunkte, abgeschlossene Teilmengen von X mit $A_1 \cup A_2 = X$. Sei $x \in A_1, y \in A_2, \gamma : [0, 1] \to X$ ein Weg von x nach y.

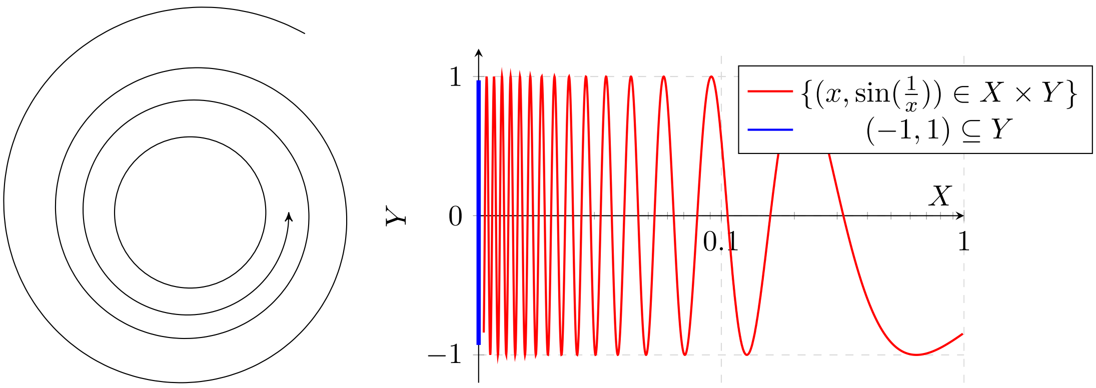
Dann ist $C := \gamma([0,1]) \subseteq X$ zusammenhängend, weil γ stetig ist.

$$C = \underbrace{(C \cap A_1)}_{\ni x} \cup \underbrace{(C \cap A_2)}_{\ni y}$$

ist Zerlegung in nichtleere, disjunkte, abgeschlossene Teilmengen $\Rightarrow$ Widerspruch

(ii) Sei $X = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1 \vee y = 1 + 2 \cdot e^{-\frac{1}{10}x} \right\}$.

Abbildung 1.8a veranschaulicht diesen Raum.



(a) Spirale S mit Kreis C (b) Sinus

Abbildung 1.8: Beispiele für Räume, die zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend sind.

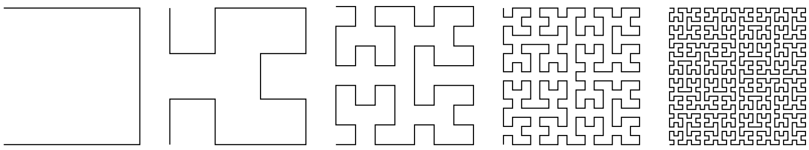
Sei $U_1 \cup U_2 = X, U_1 \neq U_2 = \emptyset, U_i$ offen. $X = C \cup S$. Dann ist $C \subseteq U_1$ oder $C \subseteq U_2$, weil C und S zusammenhängend sind.

Also ist $C = U_1$ und $S = U_2$ (oder umgekehrt).

Sei $\gamma \in C = U_1, \varepsilon > 0$ und $\mathfrak{B}_\varepsilon(y) \subseteq U_1$ eine Umgebung von y, die in U_1 enthalten ist.

Aber: $\mathfrak{B}_\varepsilon(y) \cap S \neq \emptyset \Rightarrow$ Widerspruch ■

Achtung: Es gibt stetige, surjektive Abbildungen $[0,1] \to [0,1] \times [0,1]$. Ein Beispiel ist die in Abbildung 1.9 dargestellte Hilbert-Kurve.



(a) $n = 1$ (b) $n = 2$ (c) $n = 3$ (d) $n = 4$ (e) $n = 5$

Abbildung 1.9: Hilbert-Kurve

Definition 18

Sei X ein topologischer Raum. Eine (geschlossene) **Jordankurve** in X ist ein Homöomorphismus $\gamma : [0,1] \to C \subseteq X$ $(\gamma : S^1 \to C \subseteq X)$

Satz 1.18 (Jordanscher Kurvensatz)
Ist $C = \gamma([0,1])$ eine geschlossene Jordankurve in $\mathbb{R}^2$, so hat $\mathbb{R}^2 \setminus C$ genau zwei Zusammenhangskomponenten, von denen eine beschränkt ist und eine unbeschränkt.

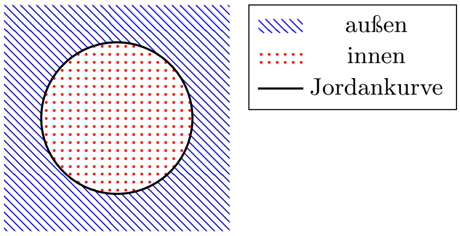


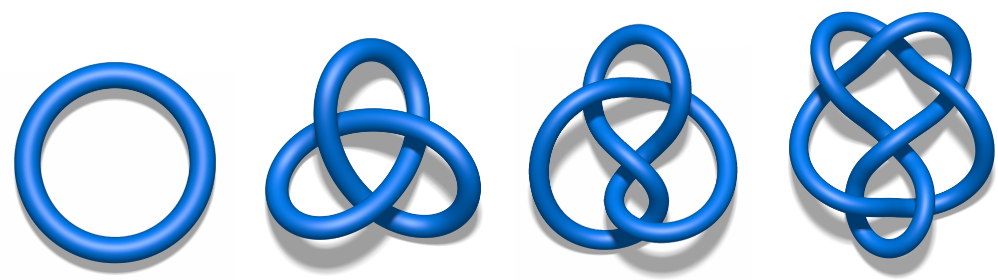
Abbildung 1.10: Die unbeschränkte Zusammenhangskomponente wird häufig inneres, die beschränkte äußeres genannt.

Beweis: ist technisch mühsam und wird daher hier nicht geführt. Er kann in „Algebraische Topologie: Eine Einführung“ von R. Stöcker und H. Zieschang auf S. 301f (ISBN 978-3519122265) nachgelesen werden.

Idee: Ersetze Weg C durch Polygonzug.

Definition 19
Eine geschlossene Jordankurve in $\mathbb{R}^3$ heißt **Knoten**.

Beispiel 17



(a) Trivialer Knoten (b) Kleeblattknoten (c) Achterknoten (d) 6_2-Knoten

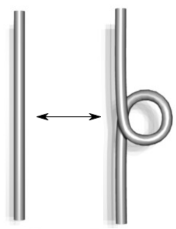
Abbildung 1.11: Beispiele für verschiedene Knoten

Definition 20
Zwei Knoten $\gamma_1, \gamma_2 : S^1 \to \mathbb{R}^3$ heißen **äquivalent**, wenn es eine stetige Abbildung $H : S^1 \times [0,1] \Rightarrow \mathbb{R}^3$ gibt mit $H(z,0) = \gamma_1(z), H(z,1) = \gamma_2(z)$ und für jedes feste $t \in [0,1]$ ist $H_z : S^1 \to \mathbb{R}^2, z \mapsto H(z,t)$ ein Knoten. Die Abbildung H heißt **Isotopie** zwischen γ_1 und γ_2.

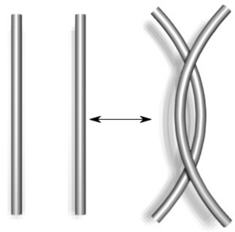
Definition 21
Ein **Knotendiagramm** eines Knotens γ ist eine Projektion $\pi : \mathbb{R}^3 \to E$ auf eine Ebene E, sodass $|(\pi|C)^{-1}(x)| \leq 2$ für jedes $x \in D$.

Ist $(\pi|C)^{-1}(x) = \{ y_1, y_2 \}$, so **liegt** y_1 **über** y_2, wenn $(y_1 - x) = \lambda(y_2 - x)$ für ein $\lambda > 1$ ist.

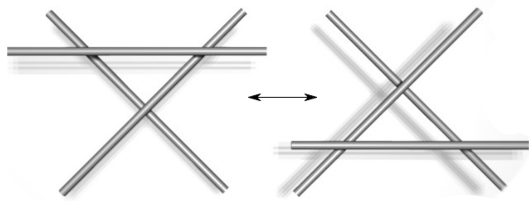
Satz 1.19 (Reidemeister)
Zwei endliche Knotendiagramme gehören genau dann zu äquivalenten Knoten, wenn sie durch endlich viele „Reidemeister-Züge“ in einander überführt werden können.



(a) Ω_1



(b) Ω_2



(c) Ω_3

Abbildung 1.12: Reidemeister-Züge

Beweis: Durch sorgfältige Fallunterscheidung. Literatur

Definition 22
Ein Knotendiagramm heißt **3-färbbar**, wenn jeder Bogen von D so mit einer Farbe gefärbt werden kann, dass an jeder Kreuzung eine oder 3 Farben auftreten und alle 3 Farben auftreten.

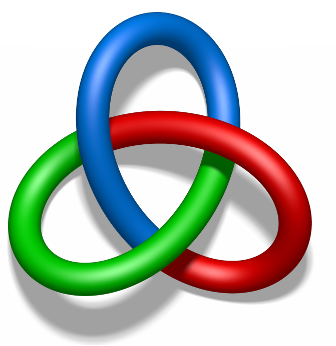


Abbildung 1.13: Ein 3-gefärber Kleeblattknoten

Übungsaufgaben

Aufgabe 1 (Sierpińskiraum)

Es sei $X := \{ 0, 1 \}$ und $\mathfrak{T}_X := \{ \emptyset, \{ 0 \}, X \}$. Dies ist der sogenannte Sierpińskiraum.

(a) Beweisen Sie, dass $(X, \mathfrak{T}_X)$ ein topologischer Raum ist.

(b) Ist $(X, \mathfrak{T}_X)$ hausdorffsch?

(c) Ist $\mathfrak{T}_X$ von einer Metrik erzeugt?

Aufgabe 2

Es sei $\mathbb{Z}$ mit der von den Mengen $U_{a,b} := a + b\mathbb{Z}(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{ 0 \})$ erzeugten Topologie versehen.

Zeigen Sie:

(a) Jedes $U_{a,b}$ und jede einelementige Teilmenge von $\mathbb{Z}$ ist abgeschlossen.

(b) $\{ -1, 1 \}$ ist nicht offen.

(c) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Aufgabe 3 (Cantorsches Diskontinuum)

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei $P_i := \{ 0, 1 \}$ mit der diskreten Topologie. Weiter Sei $P := \prod_{i \in \mathbb{N}} P_i$.

(a) Wie sehen die offenen Mengen von P aus?

(b) Was können Sie über den Zusammenhang von P sagen?

Aufgabe 4 (Kompaktheit)

(a) Ist $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) \neq 0 \}$ kompakt?

(b) Ist $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} \mid \det(A) = 1 \}$ kompakt?

(c) Ist $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ kompakt?

2 Mannigfaltigkeiten und Simpizidkomplexe

2.1 Topologische Mannigfaltigkeiten

Definition 23

Sei X ein topologischer Raum und $n \in \mathbb{N}$.

a) Eine n-dimensionale **Karte** auf X ist ein Paar (U, φ), wobei $U \subseteq X$ offen und $\varphi : U \to V$ Homöomorphismus von U auf eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$.

b) Ein n-dimensionaler **Atlas** $\mathcal{A}$ auf X ist eine Familie $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ von Karten auf X, sodass $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.

c) X heißt (topologische) n-dimensionale **Mannigfaltigkeit**, wenn X hausdorffsch ist, eine abzählbare Basis der Topologie hat und ein n-dimensionalen Atlas besitzt.

Bemerkung 9

(a) Es gibt surjektive, stetige Abbildungen $[0,1] \to [0,1] \times [0,1]$

(b) Für $n \neq m$ sind $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ nicht homöomorph. Zum Beweis benutzt man den „Satz von der Gebietstreue“ (Brouwer):

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv, so ist $f(U)$ offen.

Ist $n < m$ und $\mathbb{R}^m$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n$, so wäre

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$$

eine stetige injektive Abbildung. Also müsste $f(\mathbb{R}^n)$ offen sein $\Rightarrow$ Widerspruch

Beispiel 18

1) Jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einem Atlas aus einer Karte.

2) $\mathbb{C}^n$ ist eine $2n$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einem Atlas aus einer Karte:

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n)$$

3) $\mathcal{P}^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\, 0 \,\})/_\sim = S^n/_\sim$ und $\mathcal{P}^n(\mathbb{C})$ sind Mannigfaltigkeiten der Dimension n bzw. $2n$. besser aufschreiben

$\mathcal{P}^n(\mathbb{R}) = \bigcup_{i=0}^n U_i$,

$$\begin{aligned} U_i = \{\, (x_0 : \dots : x_n) \in \mathcal{P}^n(\mathbb{R}) \mid x_i \neq 0 \,\} &\to \mathbb{R}^n \\ (x_0 : \dots : x_n) &\mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \\ (y_1 : \dots : y_{i-1} : 1 : y_i : \dots : y_n) &\leftarrow\!\shortmid (y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

ist bijektiv.

Die $U_i,\ i = 0, \dots, n$ bilden einen n-dimensionalen Atals.

$$\begin{array}{ll} x = (1:0:0) & y = (0:1:1) \in U_2 \to \mathbb{R}^2 \\ \in U_0 \to \mathbb{R}^2 & y \mapsto (0,1) \\ x \mapsto (0,0) & \text{Umgebung: } \mathfrak{B}_1(0,1) \to \left\{ (w:z:1) \;\middle|\; w^2+z^2<1 \right\} = V_2 \end{array}$$

Umgebung $\mathfrak{B}_1(0,1) \to \{ (1:u:v) \mid \|(u,v)\| < 1 \} = v_1$

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$?

$(a:b:c) \in V_1 \cap V_2$
$\Rightarrow a \neq 0$ und $(\frac{b}{a})^2 + (\frac{c}{a})^2 < 1 \Rightarrow \frac{c}{a} < 1$
$\Rightarrow c \neq 0$ und $(\frac{a}{c})^2 + (\frac{b}{c})^2 < 1 \Rightarrow \frac{a}{c} < 1$
$\Rightarrow$ Widerspruch

4) $S^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \|x\| = 1 \right\}$ ist n-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Karten: $O_i := \{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_i > 0 \} \to \mathfrak{B}_1(\underbrace{0, \dots, 0}_{\in \mathbb{R}^n})$

$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1})$
$(x_1, \dots, x_{i-1}, \sqrt{1 - \sum_{k=1}^n x_k^2}, x_i, \cdots, x_n) \leftarrow\!\shortmid (x_1, \dots, x_n)$
$S^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} (C_i \cup D_i)$

5) $[0,1]$ ist keine Mannigfaltigkeit, denn:
Es gibt keine Umgebung von 0 in $[0,1]$, die homöomorph zu einem offenem Intervall ist.

6) $V_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \cdot y = 0 \right\}$ ist keine Mannigfaltigkeit.

Das Problem ist $(0,0)$. Wenn man diesen Punkt entfernt, zerfällt der Raum in 4 Zusammenhangskomponenten. Jeder $\mathbb{R}^n$ zerfällt jedoch in höchstens zwei Zusammenhangskomponenten, wenn man einen Punkt entfernt.

7) $V_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^3 = y^2 \right\}$ ist eine Mannigfaltigkeit.

8) $X = (\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}) \cup (0_1, 0_2)$

$$U \subseteq X \text{ offen } \Leftrightarrow \begin{cases} U \text{ offen in } \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}, & \text{falls } 0_1 \notin U, 0_2 \in U \\ \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U & \text{falls } 0_1 \in U, 0_2 \in U \end{cases}$$

Insbesondere sind $(\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}) \cup \{ 0_1 \}$ und $(\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}) \cup \{ 0_2 \}$ offen und homöomorph zu $\mathbb{R}$.

Aber: X ist nicht hausdorffsch! Denn es gibt keine disjunkten Umgebungen von 0_1 und 0_2.

9) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension n^2, weil offene Teilmengen von $\mathbb{R}^{n^2}$ eine Mannigfaltigkeit bilden.

Definition 24
Seien X, Y n-dimensionale Mannigfaltigkeiten, $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ offen, $\Phi : U \to V$ ein Homöomorphismus $Z = (X \,\dot\cup\, Y)/_\sim$ mit der von $u \sim \Phi(u) \forall u \in U$ erzeugten Äquivalenzrelation und der von $\sim$ induzierten Quotiententopologie.

Abbildung 2.1: Zweifachtorus

Z heißt **Verklebung** von X und Y längs U und V. Z besitzt einen Atlas aus n-dimensionalen Karten. Falls Z hausdoffsch ist, ist Z eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Korollar 2.1

Sind X, Y Mannigfaltigkeiten der Dimension n bzw. m, so ist $X \times Y$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n + m$.

Beweis: Produkte von Karten sind Karten. ■

Beispiel 19

Mannigfaltigkeiten mit Dimension 1:

1) Offene Intervalle, $\mathbb{R}$, $(0, 1)$ sind alle homöomorph
2) S^1

Mannigfaltigkeiten mit Dimension 2:

1) $\mathbb{R}^2$
2) S^2 (0 Henkel)
3) T^2 (1 Henkel)
4) oder mehr Henkel, wie z.B. der Zweifachtorus in Abb. 2.1

Korollar 2.2

Sei $n \in \mathbb{N}, F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $X = V(F) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0 \}$ das „vanishing set".

Dann gilt:

a) X ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$
b) Ist $\operatorname{grad}(F)(X) \neq 0 \quad \forall x \in X$, so ist X eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n - 1$.

Beweis:

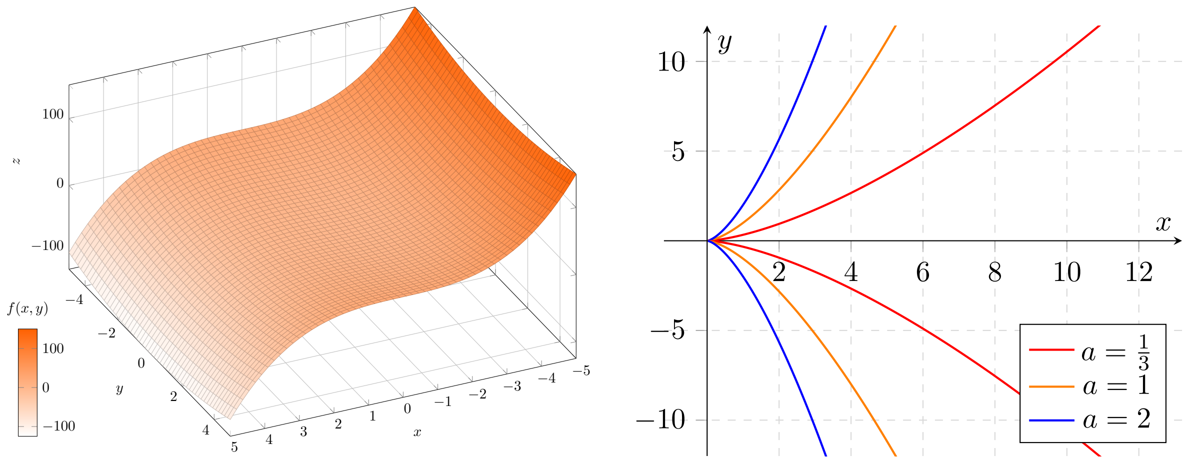
a) Sei $y \in \mathbb{R}^n \setminus V(F)$. Weil F stetig ist, gibt es $\delta > 0$, sodass $F(\mathfrak{B}_\delta(y)) \subseteq \mathfrak{B}_\varepsilon(F(y))$ mit $\varepsilon = \frac{1}{2}\|F(y)\|$. Folgt $\mathfrak{B}_\delta(y) \cap V(F) = \emptyset \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus V(F)$ ist offen.
b) Sei $x \in X$ mit $\operatorname{grad}(F)(x) \neq 0$, also o. B. d. A. $\frac{\partial F}{\partial X_1}(x) \neq 0$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x' := (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Der Satz von der impliziten Funktion liefert nun: Es gibt Umgebungen U von x' und differenzierbare Funktionen $g : U \to \mathbb{R}$, sodass $G : U \to \mathbb{R}^n$, $u \mapsto (g(u), u)$ eine stetige Abbildung auf eine offene Umgebung V von x in X ist.

■

Beispiel 20

a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $V(F) = S^2$, $\text{grad}(F) = (2x, 2y, 2z) \overset{24.b}{\Longrightarrow} S^n$ ist n-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^{n+1}$

b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto y^2 - x^3$ Es gilt: $\text{grad}(F) = (-3x^2, 2y)$. Also: $\text{grad}(0, 0) = (0, 0)$.



(a) $F(x, y) = y^2 - x^3$ (b) $y^2 - ax^3 = 0$

Abbildung 2.2: Rechts ist die Neilsche Parabel für verschiedene Parameter a.

Daher ist Korollar 24.b nicht anwendbar, aber $V(F)$ ist trotzdem eine 1-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

Definition 25

Sei X ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis der Topologie. X heißt n-dimensionale **Mannigfaltigkeit mit Rand**, wenn es einen Atlas (U_i, φ_i) gibt, wobei $U_i \subseteq X_i$ offen und φ_i ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge von

$$R^n_{+,0} := \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_m \geq 0 \}$$

ist. $R^n_{+,0}$ ist ein „Halbraum“.

Definition 26

Sei X eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand und Atlas (U_i, φ_i). Dann heißt

$$\partial X := \bigcup_{i \in I} \{ x \in U_i \mid \varphi_i(x)_n = 0 \}$$

Rand von X.

∂X ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n - 1$.

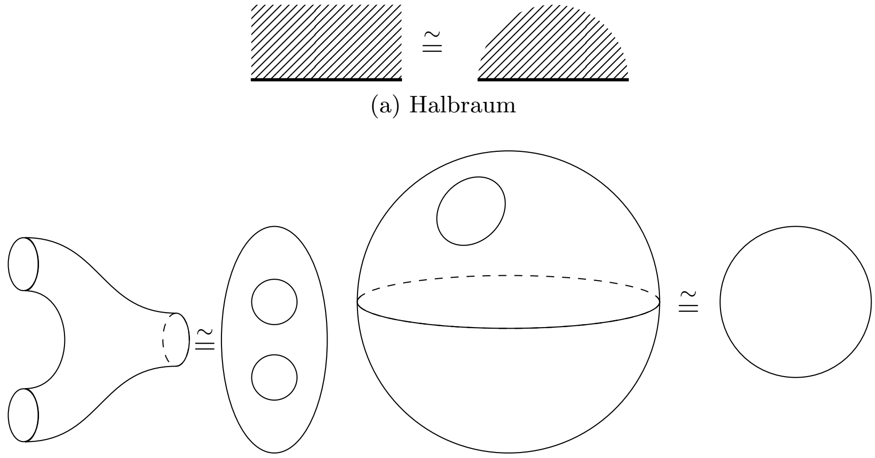
Definition 27

Sei X eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$

Für $i, j \in I$ mit $U_i, U_j \neq \emptyset$ heißt

$$\varphi_{ij} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$$
$$\varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

Kartenwechsel oder **Übergangsfunktion**.



(a) Halbraum

(b) Pair of pants (c) Sphäre mit einem Loch

Abbildung 2.3: Beispiele für Mannigfaltigkeiten mit Rand

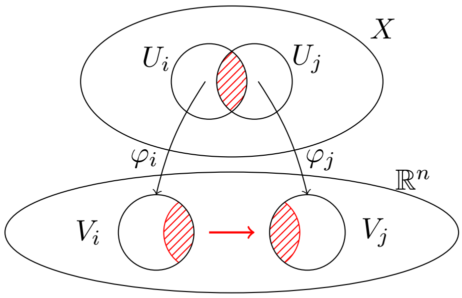


Abbildung 2.4: Kartenwechsel

2.2 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Definition 28

Sei X eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$.

a) X heißt **differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse** C^k, wenn jede Kartenwechselabbildung $\varphi_{ij},\ i, j \in I$ k-mal stetig differenzierbar ist.

b) X heißt **differenzierbare Mannigfaltigkeit**, wenn X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^∞ ist.

Definition 29

Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^k $(k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\})$ mit Atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$.

a) Eine Karte (U, φ) auf X heißt **verträglich** mit $\mathcal{A}$, wenn alle Kartenwechsel $\varphi \circ \varphi_i^{-1}$ und $\varphi_i \circ \varphi^{-1}$ $(i \in I$ mit $U_i \cap U \neq \emptyset)$ differenzierbar von Klasse C^k sind.

b) Die Menge aller mit $\mathcal{A}$ verträglichen Karten auf X bildet einen maximalen Atlas von Klasse C^k. Er heißt **C^k-Struktur** auf X.

Eine C^∞-Struktur heißt auch **differenzierbare Struktur** auf X.

Bemerkung 10

Für $n \geq 4$ gibt es auf S^n mehrere verschiedene differenzierbare Strukturen, die sog. „exotische

Sphären".

Definition 30

Seien X, Y differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension n bzw. m, $x \in X$.

a) Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ heißt **differenzierbar** in x (von Klasse C^k), wenn es Karten (U, φ) von X mit $x \in U$ und (V, ψ) von Y mit $f(U) \subseteq V$ gibt, sodass $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ stetig differenzierbar von Klasse C^k in $\varphi(x)$ ist.

b) f heißt **differenzierbar** (von Klasse C^k), wenn f in jedem $x \in X$ differenzierbar ist.

c) f heißt **Diffeomorphismus**, wenn f differenzierbar von Klasse C^∞ ist und es eine differenzierbare Abbildung $g : Y \to X$ von Klasse C^∞ gibt mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Korollar 2.3

Die Bedingung in Definition 30.a hängt nicht von den gewählten Karten ab.

Beweis: Seien (U', φ') und (V', ψ') Karten von X bzw. Y um x bzw. $f(x)$ mit $f(U') \subseteq V'$.

$$\Rightarrow \psi' \circ f \circ (\varphi')^{-1}$$
$$= \psi' \circ (\psi^{-1} \circ \psi) \circ f \circ (\varphi^{-1} \circ \varphi) \circ (\varphi')^{-1}$$

ist genau dann differenzierbar, wenn $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ differenzierbar ist.

Beispiel 21

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^3$ ist kein Diffeomorphismis, aber Homöomorphismus, da mit $g(x) := \sqrt[3]{x}$ gilt: $f \circ g = \mathrm{id}_\mathbb{R}, \quad g \circ f = \mathrm{id}_\mathbb{R}$

Bemerkung 11

Sei X eine glatte Mannigfaltigkeit. Dann ist

$$\mathrm{Diffeo}(X) := \{\, f : X \to X \mid f \text{ ist Diffeomorphismus} \,\}$$

eine Untergruppe von Homöo(X).

Definition 31

$S \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt **reguläre Fläche** $:\Leftrightarrow \forall s \in S\ \exists$ Umgebung $V(s) \subseteq \mathbb{R}^3\ \exists U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen: $\exists$ differenzierbare Abbildung $F : U \to V \cap S$: $\mathrm{Rg}(J_F(u)) = 2 \quad \forall u \in U$.

F heißt (lokale) reguläre Parametrisierung von S.

$$F(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$
$$J_F(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(p) & \frac{\partial x}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(p) & \frac{\partial y}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(p) & \frac{\partial z}{\partial v}(p) \end{pmatrix}$$

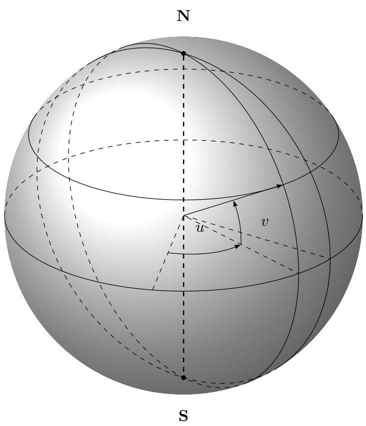
Beispiel 22

1) Rotationsflächen: Sei $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ eine differenzierbare Funktion.

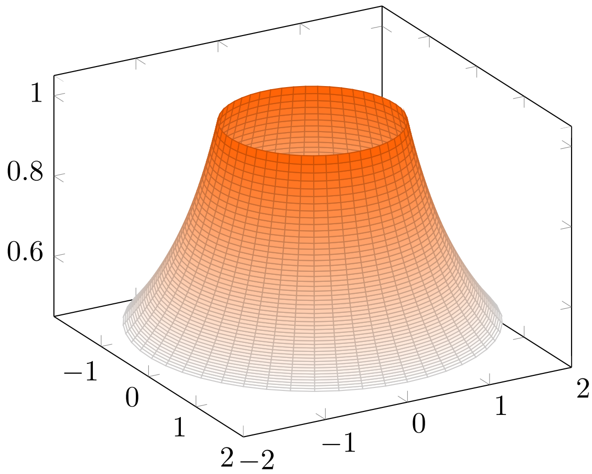
$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad (u, v) \mapsto (r(u)\cos(u), r(v)\sin(u), v)$

$$J_F(u, v) = \begin{pmatrix} -r(v)\sin u & r'(v)\cos u \\ r(v)\cos u & r'(v)\sin u \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

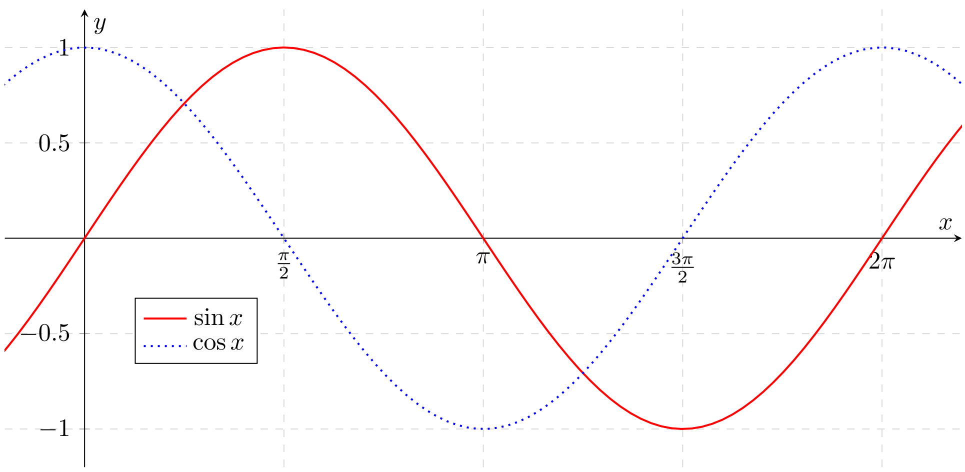
hat Rang 2 für alle $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.



(a) Kugelkooridnaten



(b) Rotationskörper



(c) Sinus und Cosinus haben keine gemeinsamme Nullstelle

2) Kugelkoordinaten: $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(u,v) \mapsto (R\cos v \cos u, R\cos v \sin u, R\sin v)$ $F(u,v) \in S_R^2$, denn

$$\begin{aligned}
&R^2\cos^2(v)\cos^2(u) + R^2\cos^2(v)\sin^2(u) + R^2\sin^2(v)\\
=&R^2(\cos^2(v)\cos^2(u) + \cos^2(v)\sin^2(u) + \sin^2(v))\\
=&R^2\left(\cos^2(v)(\cos^2(u)+\sin^2(u)) + \sin^2(v)\right)\\
=&R^2\left(\cos^2(v)+\sin^2(v)\right)\\
=&R^2
\end{aligned}$$

Die Jacobi-Matrix

$$J_F(u,v) = \begin{pmatrix} -R\cos v\sin u & -R\sin v\cos u \\ R\cos v\cos u & -R\sin v\sin u \\ 0 & R\cos v \end{pmatrix}$$

hat Rang 2 für $\cos v \neq 0$. In N und S ist $\cos v = 0$.

Korollar 2.4

Jede reguläre Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ ist eine 2-dimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit.

Beweis: z.Z.: $F_j^{-1} \circ F_i$ ist Diffeomorphismus

Hier muss ich nochmals drüberlesen.

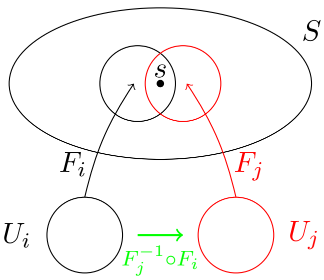


Abbildung 2.5: Reguläre Fläche S zum Beweis von Korollar 2.4

Idee: Finde differenzierbare Funktion $\widetilde{F_j^{-1}}$ in Umgebung W von s, sodass $\widetilde{F_j^{-1}}|_{S\cap W} = F_j^{-1}$.

Ausführung: Sei $u_0 \in U_i$ mit $F_i(u_0) = s = F_j(v_0), v_0 \in U_j$.

Da $\operatorname{rg} J_{F_j}(v_0) = 2$ ist, ist o. B. d. A.

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}(v_0) \neq 0$$

und $F_j(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$.

Definiere $\tilde{F}_j : U_j \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ durch

$$\tilde{F}_j(u,v,t) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)+t)$$

Offensichtlich: $\tilde{F}_j|_{U_j\times\{0\}} = F_j$

$$J_{\tilde{F}_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det J_{\tilde{F}_j}(v_0, 0) \neq 0$$

$\xRightarrow{\text{Analysis II}}$ Es gibt Umgebungen W von F_j von $\tilde{F}_j(v_0, 0) = F_j(v_0) = s$, sodass $\tilde{F}_j$ auf W eine differenzierbar Inverse F_j^{-1} hat.

Weiter ist $\tilde{F}_j^{-1}|_{W \cap S} = F_j^{-1}|_{W \cap S} \Rightarrow F_j^{-1} \circ F_i|_{F_i^{-1}(W \cap S)} = F_j^{-1} \circ F_i|_{F_i^{-1}(W \cap S)}$ ist differenzierbar.

Definition 32

Sei G eine Mannigfaltigkeit, $\circ : G \times G \to G$ eine Abbildung, $(g, h) \mapsto g \cdot h$, sodass $(G, \circ)$ eine Gruppe ist.

(a) G heißt **topologische Gruppe**, wenn die Abbildungen $\circ : G \times G \to G$ und $\iota : G \to G$.

$$(g, h) \mapsto g \cdot h \quad g \mapsto g^{-1}$$

stetig sind.

(b) Ist G eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so heißt G **Lie-Gruppe**, wenn $(G, \circ)$ und (G, ι) differenzierbar sind.

Beispiel 23

1) Alle endlichen Gruppen sind 0-dimensionale Lie-Gruppen.

2) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$

3) $(\mathbb{R}^\times, \cdot)$

4) $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$

5) $(\mathbb{R}^n, +)$, denn $A \cdot B(i, j) = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$ ist nach allen Variablen differenzierbar

$(A^{-1})(i, j) = \frac{\det(A_{ij})}{\det A}$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$$

ist diffbar.

det A_{ij} kann 0 werden, da:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

6) $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{ A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) = 1 \}$ Besser strukturieren

$\mathrm{grad}(\det -1)(A) = 0$?

$\frac{\partial}{\partial a_{11}} (\det -1) = 1 \cdot \det A_{11}$

Es gibt $i \in \{ 1, \dots, n \}$ mit $\frac{\partial}{\partial a_{1i}} (\det -1) A \neq 0$

Bemerkung 12

Ist G eine Lie-Gruppe, $g \in G$, so ist die Abbildung

$$\begin{aligned} l_g : G &\to G \\ h &\mapsto g \cdot h \end{aligned}$$

ein Diffeomorphismus.

2.3 Simplizialkomplex

Definition 33

$v_0, \dots, v_k$

a) in allgemeiner Lage $\Leftrightarrow$ es gibt keinen $(k-1)$-dimensionalen affinen Untervektorraum, der $v_0, \dots, v_k$ enthält $\Leftrightarrow v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$ sind linear abhängig.

b) $\operatorname{conv}(v_0, \dots, v_k) = \left\{ \sum_{i=0}^{k} \lambda_i v_i \;\middle|\; \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$

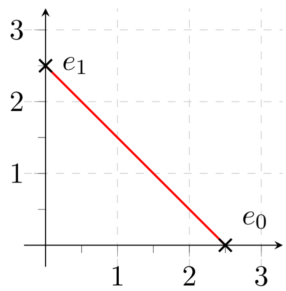
Definition 34

a) Sei $\Delta^n = \operatorname{conv}(e_0, \dots, e_k) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ die konvexe Hülle der Standard-Basisvektoren $e_0, \dots, e_k$. Δ^k heißt Standard-Simplex. stimmen die indizes?

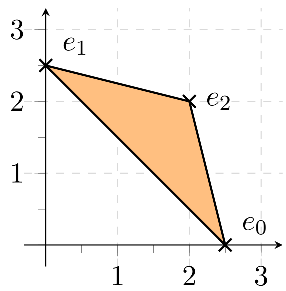
b) Für Punkte $v_0, \dots, v_k$ im $\mathbb{R}^n$ in allgemeiner Lage heißt $\delta(v_0, \dots, v_k) = \operatorname{conv}(v_0, \dots, v_k)$ ein k-**Simplex** in $\mathbb{R}^n$.

c) Ist $\Delta(v_0, \dots, v_k)$ ein k-Simplex und $I = \{ i_0, \dots, i_r \} \subseteq \{ 0, \dots, k \}$, so heißt $s_{i_0} \dots i_r := \operatorname{conv}(v_{i_0}, \dots, v_{i_r})$ **Teilsimplex** oder **Seite** von Δ. $s_{i_0} \dots i_r$ ist r-Simplex.

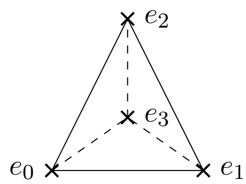
(a) 0-Simplex Δ^0



(b) 1-Simplex Δ^1



(c) 2-Simplex Δ^2



(d) 3-Simplex Δ^3

Abbildung 2.6: Beispiele für k-Simplexe

Definition 35

a) Eine endliche Menge K von Simplizes im $\mathbb{R}^n$ heißt (endlicher) **Simplizialkomplex**, wenn gilt:

(i) Für $\Delta \in K$ und $S \subseteq \Delta$ Teilsimplex ist $S \in K$

(ii) Für $\Delta_1, \Delta_2 \in K$ ist $\Delta_1 \cap \Delta_2$ leer oder ein Teilsimplex von Δ_1 und von Δ_2

b) $|K| := \bigcup_{\Delta \in K} \Delta$ (mit Spurtoplogie) heißt **geometrische Realisierung** von K.

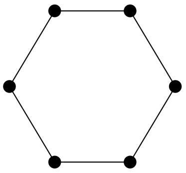
c) Ist $d = \max \{ k \mid K \text{ enthält } k - \text{Simplex} \}$, so heißt d **Dimension** von K.

Definition 36

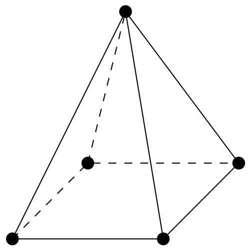
Seien K, L Simplizialkomplexe. Eine stetige Abbildung

$$f : |K| \to |L|$$

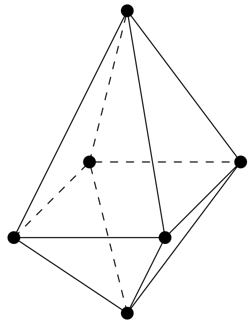
heißt **simplizial**, wenn für jedes $\Delta \in K$ gilt:



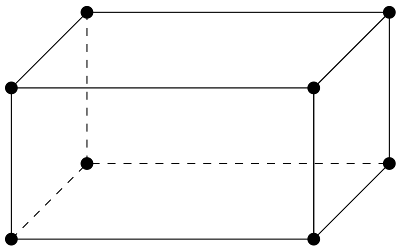
(a) 1D Simplizialkomplex



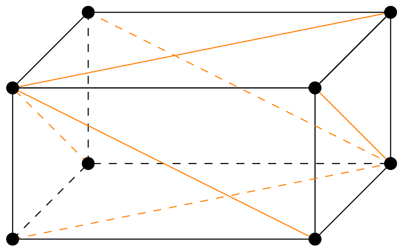
(b) 2D Simplizialkomplex (ohne untere Fläche!)



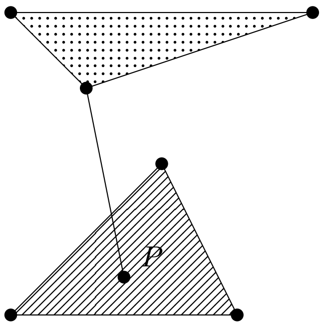
(c) 2D Simplizialkomplex



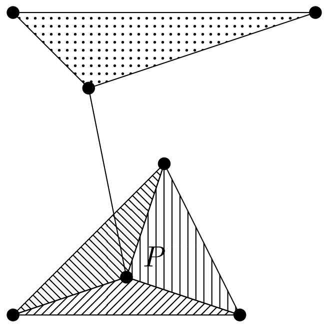
(d) 1D Simplizialkomplex



(e) 2D Simplizialkomplex



(f) P ist kein Teilsimplex, da Eigenschaft (ii) verletzt ist



(g) Simplizialkomplex

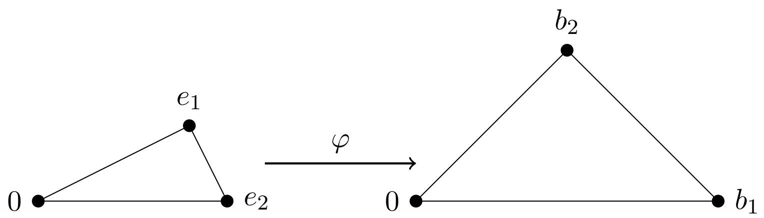
Abbildung 2.7: Beispiele für Simplizialkomplexe

(i) $f(\Delta) \in L$

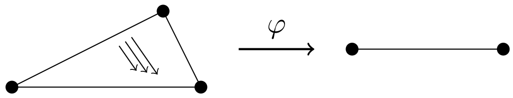
(ii) $f|_\Delta : \Delta \to f(\Delta)$ ist eine affine Abbildung.

Beispiel 24

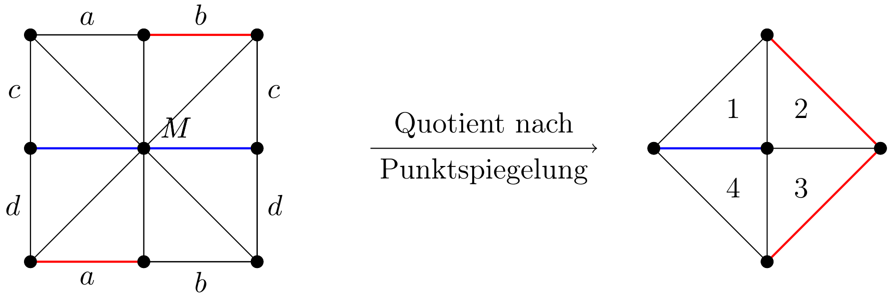
1) $\varphi(e_1) := b_1$, $\varphi(e_2) := b_2$
φ ist eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung



2) Folgende Abbildung $\Delta^n \to \Delta^{n-1}$ ist simplizial:



3) Wozu dient das Beispiel?



Definition 37

Sei K ein endlicher Simplizialkomplex. Für $n \geq 0$ sei $a_n(K)$ die Anzahl der n-Simplizes in K.

Dann heißt

$$\chi(K) := \sum_{k=0}^{\dim K} (-1)^n a_n(K)$$

Eulerzahl (oder Euler-Charakteristik) von K.

Beispiel 25

1) $\chi(\Delta^1) = 2 - 1 = 1$
   $\chi(\Delta^2) = 3 - 3 + 1 = 1$
   $\chi(\Delta^3) = 4 - 6 + 4 - 1 = 1$

2) $\chi(\text{Oktaeder-Oberfläche}) = 6 - 12 + 8 = 2$
   $\chi(\text{Rand des Tetraeders}) = 2$
   $\chi(\text{Ikosaeder}) = 12 - 30 + 20 = 2$

3) $\chi(\text{Würfel}) = 8 - 12 + 6 = 2$
   $\chi(\text{Würfel, unterteilt in Dreiecksflächen}) = 8 - (12 + 6) + (6 \cdot 2) = 2$

Korollar 2.5

$\chi(\Delta^n) = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$

Beweis: Δ^n ist die konvexe Hülle von $(e_0, \dots, e_n)$ in $\mathbb{R}^{n+1}$. Jede $(k+1)$-elementige Teilmenge von $\{ e_0, \dots, e_n \}$ definiert ein k-Simplex.

$\Rightarrow a_k(\Delta^n) = \binom{n+1}{k+1}, \quad k = 0, \dots, n$

$\Rightarrow \chi(\Delta^n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k+1}$

$f(x) = (x+1)^{n+1} \overset{\substack{\text{Binomischer}\\\text{Lehrsatz}}}{=} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k$

$\Rightarrow 0 = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (-1)^k = \chi(\Delta^n) - 1$

$\Rightarrow \chi(\Delta^n) = 1$ ■

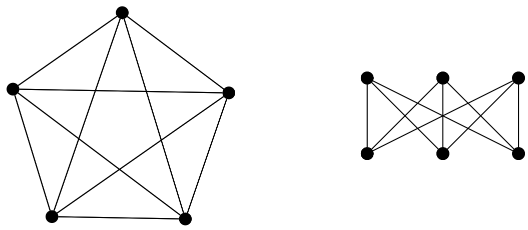
Definition 38

a) Ein 1D-Simplizialkomplex heißt **Graph**.

b) Ein Graph, der homöomorph zu S^1 ist, heißt **Kreis**.

c) Ein zusammenhängender Graph heißt **Baum**, wenn er keinen Kreis enthält.

(a) Dies wird häufig auch als Multigraph bezeichnet. (b) Planare Einbettung des Tetraeders



(c) K_5 (d) $K_{3,3}$

Abbildung 2.8: Beispiele für Graphen

Korollar 2.6
Für jeden Baum T gilt $\gamma(T) = 1$.

Beweis: Induktion über die Anzahl der Ecken.

Korollar 2.7

a) Jeder zusammenhängende Graph Γ enthält einen Teilbaum T, der alle Ecken von Γ enthält.[1]

b) Ist $n = a_1(\Gamma) = a_1(T)$, so ist $\chi(\Gamma) = 1 - n$.

Beweis:

a) Siehe „Algorithmus von Kruskal".

b) $$\begin{aligned}\chi(\Gamma) &= a_0(\Gamma) - a_1(\Gamma)\\ &= a_0(\Gamma) - (n + a_1(T))\\ &= a_0(T) - a_1(T) - n\\ &= \chi(T) - n\\ &= 1 - n\end{aligned}$$

Korollar 2.8
Sei Δ ein n-Simplex und $x \in \Delta^\circ \subseteq \mathbb{R}^n$. Sei K der Simplizialkomplex, der aus Δ durch „Unterteilung" in x entsteht. Dann ist $\chi(K) = \chi(\Delta) = 1$.

Beweis: $$\chi(K) = \chi(\Delta) - \underbrace{\underbrace{(-1)^n}_{n-\text{Simplex}} + \sum_{k=0}^{n} (-1)^k}_{(1+(-1))^{n+1}} = \chi(\Delta)$$ ■

[1] T wird „Spannbaum" genannt.

(a) K (b) Δ, das aus K durch Unterteilung entsteht

Abbildung 2.9: Beispiel für Korollar 2.8.

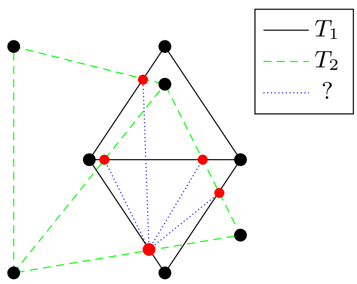
Satz 2.9 (Eulersche Polyederformel)
Sei P ein konvexes Polyeder in $\mathbb{R}^3$, d. h. ∂P ist ein 2-dimensionaler Simplizialkomplex, sodass gilt:

$$\forall x, y \in \partial P : [x, y] \subseteq P$$

Dann ist $\chi(\partial P) = 2$.

Beweis:

1) Die Aussage ist richtig für den Tetraeder.
2) O. B. d. A. sei $0 \in P$ und $P \subseteq \mathfrak{B}_1(0)$. Projeziere $0P$ von 0 aus auf $\partial \mathfrak{B}_1(0) = S^2$. Erhalte Triangulierung von S^2.
3) Sind P_1 und P_2 konvexe Polygone und T_1, T_2 die zugehörigen Triangulierungen von S^2, so gibt es eine eine Triangulierungen T, die sowohl um T_1 als auch um T_2 Verfeinerung ist.



Was bedeutet diese Zeichnung?

Nach Korollar 2.8 ist $\chi(\partial P_1) = \chi(T_1) = \chi(T) = \chi(T_2) = \chi(\partial P_2) = 2$, weil o. B. d. A. P_2 ein Tetraeder ist.

Korollar 2.10 (Der Rand vom Rand ist 0)
Sei K ein (endlicher) Simplizialkomplex mit Eckenmenge V und $<$ eine Totalordnung auf V.

Warum in Klammern?

Sei A_n die Menge der n-Simplizes in K, d. h.

$$A_n(K) := \{ \sigma \in K \mid \dim(\sigma) = n \} \quad \text{für } n = 0, \dots, d = \dim(K)$$

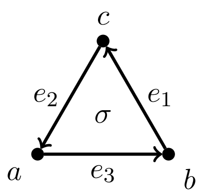
und $C_n(K)$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Basis $A_n(K)$, d. h.

$$C_n(K) = \left\{ \sum_{\sigma \in A_n(K)} c_\sigma \cdot \sigma \;\middle|\; c_\sigma \in \mathbb{R} \right\}$$

Sei $\sigma = \Delta(x_0, \ldots, x_n) \in A_n(K)$, sodass $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$.

Für $i = 0, \ldots, n$ sei $\partial_i \sigma := \Delta(x_0, \ldots, \hat{x_i}, \ldots, x_n)$ die i-te Seite von σ und $d_\sigma = d_n\sigma := \sum_{i=0}(-1)^i \partial_i \sigma \in C_{n-1}(K)$ und $d : C_n(K) \to C_{n-1}(K)$ die dadurch definierte lineare Abbildung.

Dann gilt: $d_{n-1} \circ d_n = 0$



Beispiel 26

$a < b < c$

$d_2\sigma = e_1 - e_2 + e_3 = (c - b) - (c - a) + (b - a) = 0$

Beispiel auf Tetraeder übertragen

Beweis: Sei $\sigma \in A_n$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
d_{n-1}(d_n\sigma) &= d_{n-1}(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i \partial_i \sigma) \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_{n-1}(\partial_i \sigma) \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \sum_{j=0}^{n-1} \partial_i(\partial_j \sigma)(-1)^j \\
&= \sum_{0 \le i \le j \le n-1} (-1)^{i+j} \partial_j(\partial_j(\sigma)) + \sum_{0 \le j < i \le n} (-1)^{i+j} \partial_{i-1}(\partial_j \sigma) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

weil jeder Summand aus der ersten Summe auch in der zweiten Summe vorkommt, aber mit umgekehrten Vorzeichen. ■

Definition 39

$Z_n := \text{Kern}(d_n) \subseteq C_n, \quad B_n := \text{Bild}(d_{n+1}) \subseteq C_n$

Nach Korollar 2.10 ist $B_n \subseteq Z_n$, denn $d_{n+1}(C) \in \text{Kern}(d_n)$ für $C \in C_{n+1}$. Muss das hier stehen?

a) $H_n = H_n(K, \mathbb{R}) := Z_n / B_n$ heißt n-te **Homotopiegruppe** von K.

b) $b_n(K) := \dim_{\mathbb{R}} H_n$ heißt n-te **Belti-Zahl** von K.

Satz 2.11
Für jeden endlichen Simplizialkomplex K der Dimension d gilt:

$$\sum_{k=0}^{d}(-1)^k b_k(K) = \sum_{k=0}^{d}(-1)^k a_k(K) = \chi(K)$$

Bemerkung 13
Es gilt <u>nicht</u> $a_k = b_k \ \forall k \in \mathbb{N}_0$.

Beweis:

- Dimensionsformel für d_n: $a_n = \dim Z_n + \dim B_{n-1}$ für $n \geq 1$
- Dimensionsformel für $Z_n \to H_n = Z_n/B_n$: $\dim Z_n = b_n + \dim B_n$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sum_{k=0}^{d}(-1)^k a_k &= a_0 + \sum_{k=1}^{d}(-1)^k(\dim Z_k + \dim B_{k-1}) && (2.1)\\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{d}(-1)^k \dim Z_k + \sum_{k=0}^{d}(-1)^{k+1} \dim B_{k-1} && (2.2)\\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{d}(-1)^k \dim Z_k - \sum_{k=0}^{d}(-1)^k \dim B_{k-1} && (2.3)\\
&= a_0 + \sum_{k=1}^{d-1}(-1)^k b_k + (-1)^d \underbrace{\dim Z_d}_{=b_d} - \dim B_0 && (2.4)\\
&= b_0 + \sum_{k=1}^{d-1}(-1)^k b_k + (-1)^d b_d && (2.5)\\
&= \sum_{k=0}^{d}(-1)^k b_k && (2.6)
\end{aligned}$$

Übungsaufgaben

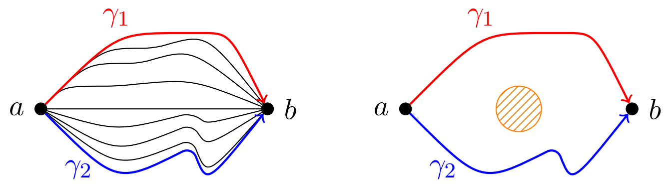
Aufgabe 5 (Zusammenhang)

(a) Beweisen Sie, dass eine topologische Mannigfaltigkeit genau dann wegzusammenhängend ist, wenn sie zusammenhängend ist

(b) Betrachten Sie nun wie in Beispiel 8) den Raum $X := (\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}) \cup \{ 0_1, 0_2 \}$ versehen mit der dort definierten Topologie. Ist X wegzusammenhängend?

3 Fundamentalgruppe und Überlagerungen

3.1 Homotopie von Wegen



(a) γ_1 und γ_2 sind homotop, da man sie „zueinander verschieben“ kann.

(b) γ_1 und γ_2 sind wegen dem Hindernis nicht homotop.

Abbildung 3.1: Beispiele für Wege γ_1 und γ_2

Definition 40

Sei X ein topologischer Raum, $a, b \in X$, $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to X$ Wege von a nach b, d. h. $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = b$

a) γ_1 und γ_2 heißen **homotop**, wenn es eine stetige Abbildung

$$H(t,0) = \gamma_1(t), H(t,1) = \gamma_2(t) \quad \forall t \in [0,1] =: I$$

und $H(0,s) = a$ und $H(1,s) = b$ für alle $s \in I$ gibt. Dann schreibt man: $\gamma_1 \sim \gamma_2$

H heißt **Homotopie** zwischen γ_1 und γ_2.

b) $\gamma_s : I \to X, \gamma_s(t) = H(t,s)$ ist Weg in X von a nach b für jedes $s \in I$.

Korollar 3.1

„Homotop“ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Wege in X von a nach b.

Beweis:

- reflexiv: $H(t,s) = \gamma(t)$ für alle $t, s \in I \times I$
- symmetrisch: $H'(t,s) = H(t, 1-s)$ für alle $t, s \in I \times I$
- transitiv: Seien H' bzw. H'' Homotopien von γ_1 nach γ_2 bzw. von γ_2 nach γ_3.

  Dann sei $H(t,s) := \begin{cases} H'(t, 2s) & \text{falls } 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ H''(t, 2s-1) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$

  $\Rightarrow H$ ist stetig und Homotopie von γ_1 nach γ_2

■

Beispiel 27

1) Sei $X = S^1$. γ_1 und γ_2 aus Abb. 3.2 nicht homöotop.

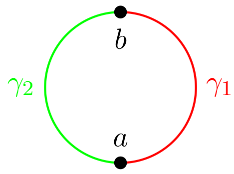


Abbildung 3.2: Kreis mit zwei Wegen

Abbildung 3.3: Torus mit drei Wegen

2) Sei $X = T^2$. γ_1, γ_2 und γ_3 aus Abb. 3.4 sind paarweise nicht homöotop.

3) Sei $X = \mathbb{R}^2$ und $a = b = (0,0)$.

   Je zwei Wege im $\mathbb{R}^2$ mit Anfangs- und Enpunkt $(0,0)$ sind homöotop.

   Sei $\gamma_0 : I \to \mathbb{R}^2$ der konstante Weg $\gamma_0(t) = 0\ \forall t \in I$. Sei $\gamma(0) = \gamma(1) = 0$.

   $H(t,s) := (1-s)\gamma(t)$ ist stetig, $H(t,0) = \gamma(t)\ \forall t \in I$ und $H(t,1) = 0\ \forall t \in I$

Korollar 3.2
Sei X ein topologischer Raum, $\gamma : I \to X$ ein Weg und $\varphi : I \to I$ stetig mit $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. Dann sind γ und $\gamma \circ \varphi$ homotop.

Beweis: Sei $H(t,s) = \gamma((1-s)t + s \cdot \varphi(t))$.

H ist stetig, $H(t,0) = \gamma(t)\quad H(t,1) = \gamma(\varphi(t)), H(0,s) = \gamma(0),\quad H(1,s) = \gamma(1-s+s) = \gamma(1)$ $\Rightarrow H$ ist Homotopie.

Definition 41
Seien γ_1, γ_2 Wege in X mit $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Dann ist

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{falls} 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{falls} \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ein Weg in X. Er heißt **zusammengesetzter Weg** und man schreibt $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$.

Korollar 3.3
Das zusammensetzen von Wegen ist nur bis auf Homotopie assoziativ, d. h.:

$$\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3) \neq (\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$$
$$\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3) \sim (\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$$

mit $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ und $\gamma_2(1) = \gamma_3(0)$.

Beweis: Das Zusammensetzen von Wegen ist wegen Korollar 3.2 bis auf Homotopie assoziativ, da

$$\gamma(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & \text{falls } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ t - \frac{1}{4} & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t < \frac{3}{4} \\ 2t-1 & \text{falls } \frac{3}{4} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

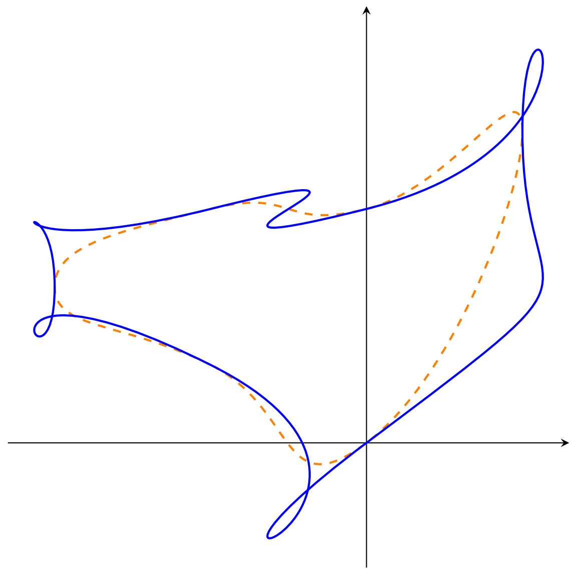


Abbildung 3.4: Zwei Wege im $\mathbb{R}^2$ mit Anfangs- und Enpunkt $(0,0)$

TODO TODO

(a) $\gamma_1 * (\gamma_2 * \gamma_3)$ (b) $(\gamma_1 * \gamma_2) * \gamma_3$

Abbildung 3.5: Das Zusammensetzen von Wegen ist nicht assoziativ

Korollar 3.4

Sei X ein topologischer Raum, $a, b, c \in X$, γ_1, γ_1' Wege von a nach b, γ_2, γ_2' Wege von b nach c.

Sind $\gamma_1 \sim \gamma_1'$ und $\gamma_2 \sim \gamma_2'$, so ist $\gamma_1 * \gamma_2 \sim \gamma_1' * \gamma_2'$.

Beweis: Sei H_i eine Homotopie zwischen γ_i und γ_i', $i = 1, 2$.

Dann ist

$$H(t,s) := \begin{cases} H_1(2t, s) & \text{falls } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \quad \forall s \in I \\ H_2(2t-1, s) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Homotopie zwischen $\gamma_1 * \gamma_2$ und $\gamma_1' * \gamma_2'$ (!)

Hier fehlt noch was

TODO

Abbildung 3.6: Situation aus Korollar 3.4

.

Abbildung 3.7: Bis auf Parametrisierung sind $\gamma_0 * \gamma$ und γ das selbe

.

3.2 Fundamentalgruppe

Für einen Weg γ sei $[\gamma]$ seine **Homotopieklasse**.

Definition 42

Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Sei außerdem

$$\pi_1(X, x) := \{ [\gamma] \mid \gamma \text{ ist Weg in } X \text{ mit } \gamma(0) = \gamma(1) = x \}$$

Durch $[\gamma_1] * [\gamma_2] := [\gamma_1 * \gamma_2]$ wird $\pi_1(X, x)$ zu einer Gruppe. Diese Gruppe heißt **Fundamentalgruppe** in X im Basispunkt x.

Bemerkung 14

Im $\mathbb{R}^2$ gibt es nur eine Homotopieklasse.

Beweis: Fundamentalgruppe ist eine Gruppe

a) Abgeschlossenheit folgt aus ?

b) Assoziativität folgt aus Korollar 3.3

c) Neutrales Element $e = [\gamma_0], \gamma_0(t) = x \quad \forall t \in I$.

$e * [\gamma] = [\gamma] = [\gamma] * e$, da $\gamma_0 * \gamma \sim \gamma$

d) Inverses Element $[\gamma]^{-1} = [\overline{\gamma}] = [\gamma(1-t)]$, denn $\overline{\gamma} * \gamma \sim \gamma_0 \sim \gamma * \overline{\gamma}$

Beispiel 28

1) $S^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \} = \left\{ (\cos\varphi, \sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \right\}$

$\pi_1(S^1, 1) = \left\{ [\gamma^k] \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cong \mathbb{Z}$

$[\gamma^k] \mapsto k$

2) $\pi_1(\mathbb{R}^2, 0) = \pi_1(\mathbb{R}^2, x) = \{ e \}$ für jedes $x \in \mathbb{R}^2$

3) $\pi_1(\mathbb{R}^n, x) = \{ e \}$ für jedes $x \in \mathbb{R}^n$

4) $G \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt bzgl. $x \in G$, wenn für jedes $y \in G$ auch die Strecke $[x, y] \subseteq G$ ist. hier fehlt was

Für jedes sternförmige $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ist $\pi_1(G, x) = \{ e \}$

5) $\pi_1(S^2, x_0) = \{ e \}$, da im $\mathbb{R}^2$ alle Wege homotop zu $\{ e \}$ sind. Mithilfe der stereographischen Projektion kann von S^2 auf den $\mathbb{R}^2$ abgebildet werden.

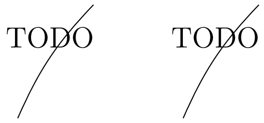
Dieses Argument funktioniert nicht mehr bei flächendeckenden Wegen!

Korollar 3.5

Sei X ein topologischer Raum, $a, b \in X$, $\delta : I \to X$ ein Weg von a nach b.

Dann ist die Abbildung

$$\alpha : \pi_1(X, a) \to \pi_1(X, b) \quad [\gamma] \mapsto [\overline{\delta} * \gamma * \delta]$$



(a) TODO (b) Sternförmiges Gebiet

Abbildung 3.8: TODO

Abbildung 3.9: Situation aus Korollar 3.5

.

ein Gruppenisomorphismus.

Beweis:

$$\begin{aligned}\alpha([\gamma_1]*[\gamma_2]) &= [\overline{\delta}*(\gamma_1\gamma_2)*\delta] \\ &= [\overline{\delta}*\gamma_1*\delta*\overline{\delta}*\gamma_2*\delta] && = [\overline{\delta}*\gamma_1*\delta]*[\overline{\delta}*\gamma_2*\delta] \\ &= \alpha([\gamma_1])*\alpha([\gamma_2])\end{aligned}$$

Definition 43

Ein wegzusammenhängender topologischer Raum X heißt **einfach zusammenhängend**, wenn $\pi_1(X,x)=\{\,e\,\}$ für ein (jedes) $x \in X$.

was denn nun?

Korollar 3.6

Es seien X, Y topologische Räume, $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung, $x \in X, y := f(x) \in Y$.

a) Dann ist die Abbildung $f_* : \pi_1(X,x) \to \pi_1(Y,y), [y] \to [f \circ y]$ ein Gruppenhomomorphismus.

b) Ist Z ein weiterer topologischer Raum und $g : Y \to Z$ eine stetige Abbildung $z := g(y)$. Dann ist $(g \circ f)_* = g_* \circ f_* : \pi_1(X,x) \to \pi_1(Z,z)$

Beweis:

a) f_* ist wohldefiniert: Seien γ_1, γ_2 homotope Wege von x. z.Z.: $f \circ \gamma_1 \sim f \circ \gamma_2$: Nach Voraussetzung gibt es stetige Abbildungen $H : I \times I \to X$ mit $H(t,0) = \gamma_1(t), H(t,1) = \gamma_2(t), H(0,S) = H(1,S) = x$. Dann ist $f \circ H : I \times I \to Y$ mit ... $(f \circ H)(t,0) = f(H(t,0)) = f(\gamma_1(t)) = (f \circ \gamma_1)(t)$ etc. $\Rightarrow f \circ \gamma_1 \sim f \circ \gamma_2$.

Warum die Punkte?

$f_*([\gamma_1]*[\gamma_2]) = [f \circ (\gamma_1 * \gamma_2)] = [(f \circ \gamma_1)] * [(f \circ \gamma_2)] = f_*([\gamma_1]) * f_*([\gamma_2])$

b) $(g \circ f)_*([\gamma]) = [(g \circ f) \circ \gamma] = [g \circ (f \circ \gamma)] = g_*([f \circ \gamma]) = g_*(f_*([\gamma])) = (g_* \circ f_*)([\gamma])$

Abbildung 3.10: Situation aus Korollar 3.6

Abbildung 3.11: Situation aus Satz 3.9

Beispiel 29

1) $f : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ ist injektiv, aber $f_* : \pi_1(S^1, 1) \cong \mathbb{Z} \to \pi_1(\mathbb{R}^2, 1) - 0\{\, e \,\}$ ist nicht injektiv

2) $f : \mathbb{R} \to S^1, t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$ ist surjektiv, aber $f_* : \pi_1(\mathbb{R}, 0) = \{\, e \,\} \to \pi_1(S^2, 1) \cong \mathbb{Z}$ ist nicht surjektiv

Korollar 3.7

Ist $f : X \to Y$ ein Homöomorphismus zwischen topologischen Räumen X, Y, so ist $f_* : \pi_1(X, x) \to \pi_1(Y, f(x))$ ein Isomorphismus für jedes $x \in X$.

Beweis: Sei $g : Y \to X$ die Umkehrabbildung, d. h. g ist stetig und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$, $g \circ f = \mathrm{id}_X$

$\Rightarrow f_* \circ g_* = (f \circ g)_* = (\mathrm{id}_Y)_* = \mathrm{id}_{\pi_1(Y, f(X)}$ und $g_* \circ f_* = \mathrm{id}_{\pi_1(X,x)}$.

Definition 44

Seien X, Y topologische Räume, $x_0 \in X, y_0 \in Y, f, g : X \to Y$ stetig mit $f(x_0) = y_0 = g(x_0)$.

f und g heißen **homotop** ($f \sim g$), wenn es eine stetige Abbildung $H : X \times I \to Y$ gibt mit $H(X, 0) = f(X), H(X, 1) = g(x)$ für alle $x \in X$ und $H(x_0, S) = y_0$ für alle $s \in I$.

Korollar 3.8

Sind f und g homotop, so ist $f_* = g_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$.

Beweis: Sei γ ein geschlossener Weg in X um x_0, d. h. $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$.

Z. Z.: $f \circ \gamma \sim g \circ \gamma$

Sei dazu $H_\gamma : I \times I \to Y, (t, s) \mapsto H(\gamma(t), S)$. Dann gilt: $H_\gamma(t, 0) = H(\gamma(t), 0) = (g \circ \gamma)(t)$, $H_\gamma(1, s) = H(\gamma(1), s) = H(x_0, s) = y_0$ für alle s.

Beispiel 30

$f : X \to Y, g : Y \to X$ mit $g \circ f \sim \mathrm{id}_X$, $f \circ g \sim \mathrm{id}_Y$

$\Rightarrow f_*$ ist Isomorphismus. Konkret: $f : \mathbb{R}^2 \to \{\, 0 \,\}$, $g : \{\, 0 \,\} \to \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow f \circ g = \mathrm{id}_{\{\, 0 \,\}}$, $g \circ f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto 0$ für alle x.

$g \circ f \sim \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ mit Homotopie: $H : \mathbb{R}^2 \times I \to \mathbb{R}^2, H(x, S) = (1 - s)x$ (stetig!)

$\Rightarrow H(X, 0) = X = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}(X), H(X, 1) = 0, H(0, s) = 0$ für alle $s \in I$

Satz 3.9 (Satz von Seifert und van Kampen „light“)

Sei X ein topologischer Raum, $U, V \subseteq X$ offen mit $U \cup V = X$ und $U \cap V$ wegzusammenhängend.

Dann wird $\pi_1(X, x)$ für $x \in U \cap V$ erzeugt von geschlossenen Wegen um x, die ganz in U oder ganz in V verlaufen.

TODO

Abbildung 3.12: Situationsskizze

TODO

Abbildung 3.13: Topologischer Raum X

Beweis: Sei $\gamma : I \to X$ ein geschlossener Weg von x. Überdecke I mit endlich vielen offenen Intervallen, die ganz in $\gamma^{-1}(U)$ oder ganz in $\gamma^{-1}(V)$ liegen.

O. B. d. A. sei $\gamma(I_1) \subseteq U, \gamma(I_2) \subseteq V$, etc.

Wähle $t_i \in I_i \cap I_{i+1}$, also $\gamma(t_i) \in U \cap V$. Sei σ_i Weg in $U \cap V$ von x_0 nach $\gamma(t_i) \Rightarrow \gamma$ ist homotop zu

$$\underbrace{\gamma_1 * \overline{\sigma_1}}_{\text{in } U} * \underbrace{\sigma_1 * \gamma_2 * \overline{\sigma_2}}_{\text{in } V} * \cdots * \sigma_{n-1} * \gamma_2$$

Beispiel 31

1) $\pi_1(X, x)$ wird „frei“ erzeugt von a und b, weil $\pi_1(U, x) = < a > \cong \mathbb{Z}, \pi_1(V, x) = < b > \cong \mathbb{Z}$, insbesondere ist $a * b$ nicht homotop zu $b * a$.

2) Torus: $\pi_1(T^2, X)$ wird erzeugt von a und b.

Definition 45

Es seien X, Y zusammenhängende topologische Räume und $p : Y \to X$ eine stetige, surjektive Abbildung.

p heißt **Überlagerung**, wenn jedes $x \in X$ eine offene Umgebung $U = U_X$ besitzt, sodass $p^{-1}(U)$ disjunkte Vereinigung von offenen Teilmengen V_j von Y ist ($j \in I_X$) und $p|_{V_j} : V_j \to U$ ein Homöomorphismus ist.

Beispiel 32

1)

2)

3) $\mathbb{R}^n \to T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$

4) $S^n \to \mathcal{P}^n(\mathbb{R})$

5) $S^1 \to S^1$, $z \mapsto z^2$

Korollar 3.10

Überlappungen sind offene Abbildungen, d. h. ist $p : Y \to X$ Überlappung, $V \subseteq Y$ offen, so ist $p(V)$ offen in X.

TODO

Abbildung 3.14: $a * b = b * a \Leftrightarrow a * b * \overline{a} * \overline{b} \sim e$

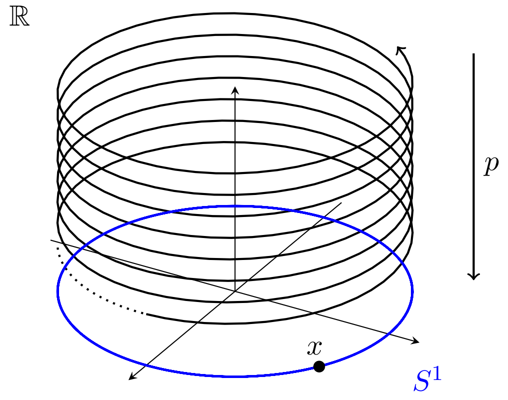


Abbildung 3.15: $\mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$

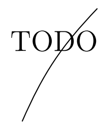


Abbildung 3.16: $\mathbb{R}^2 \to T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$

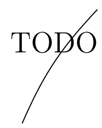


Abbildung 3.17: $t \mapsto (\cos 4\pi t, \sin 4\pi t)$

Beweis: Sei $x \in p(V)$, etwa $x = p(y)$ $(y \in V)$. Sei weiter $U = U_x$ die offene Umgebung von x wie in Definition 45 und V_j die Komponente von $p^{-1}(U)$, die y enthält.

Dann ist $V \cap V_j$ offene Umgebung von y.

$\Rightarrow p(V \cap V_j)$ ist offen in $p(V_j)$, also auch offen in X. Außerdem ist $p(y) = x \in p(V \cap V_j)$ und $p(V \cap V_j) \subseteq p(V)$.

$\Rightarrow p(V)$ ist offen.

Die Definition von Diskret habe ich mir überlegt. Hatten wir das schon mal? Haben wir Häufungspunkt definiert?

Definition 46

Sei M eine Menge und X ein topologischer Raum.

M heißt **diskret** in X, wenn M in X keinen Häufungspunkt hat.

Korollar 3.11

Sei $p : Y \to X$ Überlagerung, $x \in X$.

a) X hausdorffsch $\Rightarrow Y$ hausdorffsch

b) $p^{-1}(X)$ ist diskret in Y

Beweis:

a) Seien $y_1, y_2 \in Y$.

1. Fall: $p(y_1) = p(y_2) = x$.

Sei U Umgebung von x wie in Definition 45, V_{j_1} bzw. V_{j_2} die Komponente von $p^{-1}(U)$, die y_1 bzw. y_2 enthält.

Dann ist $V_{j_1} \neq V_{j_2}$, weil beide Element $p^{-1}(x)$ enthält. Was steht hier?

$\Rightarrow V_{j_1} \cap V_{j_2} = \emptyset$ nach Voraussetzung.

2. Fall: $p(y_1) \neq p(y_2)$.

Dann seien U_1 und U_2 disjunkte Umbebungen von $p(y_1)$ und $p(y_2)$.

$\Rightarrow p^{-1}(U_1)$ und $p^{-1}(U_2)$ sind Umgebungen von y_1 und y_2.

b) Sei $y \in Y$

1. Fall: $y \in p^{-1}(x)$

Finde v_j, sodass kein … …

2. Fall: $y \notin p^{-1}(x)$

…

Korollar 3.12

Sei $p : Y \to X$ Überlagerung, $x_1, x_2 \in X$.

Dann ist $|p^{-1}(x_1)| = |p^{-1}(x_2)|$.[1]

[1] $|p^{-1}(x_1)| = \infty$ ist erlaubt!

Abbildung 3.18: Beim liften eines Weges bleiben geschlossene Wege im allgemeinen nicht geschlossen

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[rr, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Abbildung 3.19: Situation aus Korollar 3.13

Beweis: Sei U Umgebung von x_1 wie in Definition 45, $x \in U$. Dann enthält jedes $V_j, j \in I_X$ genau ein Element von $p^{-1}(x)$

$\Rightarrow |p^{-1}(x)|$ ist konstant auf U

$\xRightarrow{X zhgd.} |p^{-1}(x)|$ ist konstant auf X

Definition 47

Sei $p : Y \to X$ Überlagerung, Z ein weiterer topologischer Raum, $f : Z \to X$ stetig.

Eine stetige Abbildung $\tilde{f} : Z \to Y$ heißt **Liftung** von f, wenn $p \circ \tilde{f} = f$ ist.

Korollar 3.13

Sei Z zusammenhängend und $f_0, \dots, f_1 : Z \to Y$ Liftungen von f.

$\exists z_0 \in Z : f_0(z) = f_1(z) \Rightarrow f_0 = f_1$

Beweis: Sei $T = \{ z \in Z \mid f_0(z) = f_1(z) \}$.

Z. Z.: T ist offen und $Z \setminus T$ ist auch offen.

Sei $z \in T, x = f(z), U$ Umgebung von x wie in Definition 45, V die Komponente von $p^{-1}(U)$, die $y := f_0(z) = f_1(z)$. deutsch?

Sei $q : U \to V$ die Umkehrabbildung zu $p|_V$.

Sei $W := f^{-1}(U) \cap f_0^{-1}(V) \cap f_1^{-1}(V)$. W ist offene Umgebung in Z von z.

Behauptung: $B \subseteq T$

Denn für $w \in W$ ist $q(f(w)) = q((p \circ f_0))(w) = ((q \circ p) \circ f_0)(w) = f_0(w) = q(f(w)) = f_1(w)$

$\Rightarrow T$ ist offen.

Analog: $Z \setminus T$ ist offen.

Satz 3.14

Sei $p : Y \to X$ Überlagerung, $\gamma : I \to X$ ein Weg, $y \in Y$ mit $p(y) = \gamma(0) =: x$.

Dann gibt es genau einen Weg $\tilde{\gamma} : I \to Y$ mit $\tilde{\gamma}(0) = y$ und $p \circ \tilde{\gamma} = \gamma$.

Beweis: Existenz: Siehe Skizze.

Übungsaufgaben

Aufgabe 6

Berechnen Sie die Homologiegruppen von S^1 und S^2, indem Sie zu S^1 bzw. S^2 homöomorphe Simplizialkomplexe betrachten.

Aufgabe 7

Es sei G eine topologische Gruppe und e ihr neutrales Element. Man beweise, dass $\pi_1(G, e)$ abelsch ist.

Lösungen der Übungsaufgaben

Lösung zu Aufgabe 1

Teilaufgabe a) Es gilt:

(i) $\emptyset, X \in \mathfrak{T}_X$.

(ii) $\mathfrak{T}_X$ ist offensichtlich unter Durchschnitten abgeschlossen, d. h. es gilt für alle $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}_X : U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{T}_X$.

(iii) Auch unter beliebigen Vereinigungen ist $\mathfrak{T}_X$ abgeschlossen, d. h. es gilt für eine beliebige Indexmenge I und alle $U_i \in \mathfrak{T}_X$ für alle $i \in I : \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathfrak{T}_X$

Also ist $(X, \mathfrak{T}_X)$ ein topologischer Raum.

Teilaufgabe b) Wähle $x = 1, y = 0$. Dann gilt $x \neq y$ und die einzige Umgebung von x ist X. Da $y = 0 \in X$ können also x und y nicht durch offene Mengen getrennt werden. $(X, \mathfrak{T}_X)$ ist also nicht hausdorffsch.

Teilaufgabe c) Nach Bemerkung 3 sind metrische Räume hausdorffsch. Da $(X, \mathfrak{T}_X)$ nach (b) nicht hausdorffsch ist, liefert die Kontraposition der Trennungseigenschaft, dass $(X, \mathfrak{T}_X)$ kein metrischer Raum sein kann.

Lösung zu Aufgabe 2

Teilaufgabe a)

Beh.: $\forall a \in \mathbb{Z} : \{ a \}$ ist abgeschlossen.

Sei $a \in \mathbb{Z}$ beliebig. Dann gilt:

Hat jemand diesen Beweis?

Teilaufgabe b)

Beh.: $\{ -1, 1 \}$ ist nicht offen

Bew.: durch Widerspruch

Annahme: $\{ -1, 1 \}$ ist offen.

Dann gibt es $T \subseteq \mathfrak{B}$, sodass $\bigcup_{M \in T} M = \{ -1, 1 \}$. Aber alle $U \in \mathfrak{B}$ haben unendlich viele Elemente. Auch endlich viele Schnitte von Elementen in $\mathfrak{B}$ haben unendlich viele Elemente $\Rightarrow$ keine endliche nicht-leere Menge kann in dieser Topologie offen sein $\Rightarrow \{ -1, 1 \}$ ist nicht offen. ■

Teilaufgabe c)

Beh.: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Bew.: durch Widerspruch

Annahme: Es gibt nur endlich viele Primzahlen $p \in \mathbb{P}$

Dann ist

$$\mathbb{Z} \setminus \{ -1, +1 \} \overset{\text{FS d. Arithmetik}}{=} \bigcup_{p \in \mathbb{P}} U_{0,p}$$

endlich. Das ist ein Widerspruch zu $|\mathbb{Z}|$ ist unendlich und $|\{ -1, 1 \}|$ ist endlich. ■

Lösung zu Aufgabe 3

(a) **Beh.:** Die offenen Mengen von P sind Vereinigungen von Mengen der Form

$$\prod_{j \in J} U_j \times \prod_{i \in \mathbb{N}, i \neq j} P_i$$

wobei $J \subseteq \mathbb{N}$ endlich und $U_j \subseteq P_j$ offen ist.

Beweis: Nach Definition der Produkttopologie bilden Mengen der Form

$$\prod_{i \in J} U_j \times \prod_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ i \notin J}} P_i, \text{ wobei } J \subseteq \mathbb{N} \text{ endlich und } U_j \subseteq P_j \text{offen } \forall j \in J$$

eine Basis der Topologie. Damit sind die offenen Mengen von P Vereinigungen von Mengen der obigen Form. ■

(b) **Beh.:** Die Zusammenhangskomponenten von P sind alle einpunktig.

Beweis: Es seinen $x, y \in P$ und x sowie y liegen in der gleichen Zusammenhangskomponente $Z \subseteq P$. Da Z zusammenhängend ist und $\forall i \in I : p_i : P \to P_i$ ist stetig, ist $p_i(Z) \subseteq P_i$ zusammenhängend für alle $i \in \mathbb{N}$. Die zusammenhängenden Mengen von P_i sind genau $\{ 0 \}$ und $\{ 1 \}$, d. h. für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt entweder $p_i(Z) \subseteq \{ 0 \}$ oder $p_i(Z) \subseteq \{ 1 \}$. Es sei $z_i \in \{ 0, 1 \}$ so, dass $p_i(Z) \subseteq \{ z_i \}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt also:

$$\underbrace{p_i(x)}_{=x_i} = z_i = \underbrace{p_i(y)}_{=y_i} \forall i \in \mathbb{N}$$

Somit folgt: $x = y$ ■

Lösung zu Aufgabe 4

Kommt noch.

Lösung zu Aufgabe 5

(a) **Vor.:** Sei M eine topologische Mannigfaltigkeit.
Beh.: M ist wegzusammehängend $\Leftrightarrow$ M ist zusammenhängend

Beweis: „$\Rightarrow$“: Da M insbesondere ein topologischer Raum ist folgt diese Richtung direkt aus Korollar 1.17.

„$\Leftarrow$“: Seien $x, y \in M$ und

$$Z := \{ z \in M \mid \exists \text{Weg von } x \text{ nach } z \}$$

Es gilt:

(i) $Z \neq \emptyset$, da M lokal wegzusammenhängend ist

(ii) Z ist offen, da M lokal wegzusammenhängend ist

(iii) $Z^C := \{ \tilde{z} \in M \mid \nexists \text{Weg von } x \text{ nach } \tilde{z} \}$ ist offen

Da M eine Mannigfaltigkeit ist, existiert zu jedem $\tilde{z} \in Z^C$ eine offene und wegzusammenhängende Umgebung $U_{\tilde{z}} \subseteq M$.

Es gilt sogar $U_{\tilde{z}} \subseteq Z^C$, denn gäbe es ein $U_{\tilde{z}} \ni \overline{z} \in Z$, so gäbe es Wege $\gamma_2 : [0,1] \to M, \gamma_2(0) = \overline{z}, \gamma_2(1) = x$ und $\gamma_1 : [0,1] \to M, \gamma_1(0) = \tilde{z}, \gamma_1(1) = \overline{z}$. Dann wäre aber

$$\gamma : [0,1] \to M, \quad \gamma(x) = \begin{cases} \gamma_1(2x) & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2x-1) & \text{falls } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$$

ein stetiger Weg von $\tilde{z}$ nach $x \Rightarrow$ Widerspruch.

Da M zusammenhängend ist und $M = \underbrace{Z}_{\text{offen}} \cup \underbrace{Z^C}_{\text{offen}}$, sowie $Z \neq \emptyset$ folgt $Z^C = \emptyset$.

Also ist $M = Z$ wegzusammenhängend. ■

(b) **Beh.:** X ist wegzusammenhängend.

Beweis: $X := (\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}) \cup \{ 0_1, 0_2 \}$ und $(\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}) \cup \{ 0_2 \}$ sind homöomorph zu $\mathbb{R}$. Also sind die einzigen kritischen Punkte, die man nicht verbinden können könnte 0_1 und 0_2.

Da $(\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}) \cup \{ 0_1 \}$ homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist, exisitert ein Weg γ_1 von 0_1 zu einem beliebigen Punkt $a \in \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$.

Da $(\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}) \cup \{ 0_2 \}$ ebenfalls homöomorph zu $\mathbb{R}$ ist, existiert außerdem ein Weg γ_2 von a nach 0_2. Damit existiert ein (nicht einfacher) Weg γ von 0_1 nach 0_2. ■

Lösung zu Aufgabe 6

Kommt noch.

Lösung zu Aufgabe 7

Kommt noch.

Bildquellen

Alle Bilder, die hier nicht aufgeführt sind, wurden selbst erstellt.

Teilweise wurden die im folgenden aufgelisteten Bilder noch leicht modifiziert.

Abb. 0.1a S^2: Tom Bombadil, tex.stackexchange.com/a/42865/5645

Abb. 0.1b Würfel: Jan Hlavacek, tex.stackexchange.com/a/12069/5645

Abb. 0.1e T^2: Jake, tex.stackexchange.com/a/70979/5645

Abb. 1.6 Stereographische Projektion: texample.net/tikz/examples/map-projections

Abb. 1.11 Knoten von Jim.belk aus der „Blue knots“-Serie:

- Trivialer Knoten: commons.wikimedia.org/wiki/File:Blue_Unknot.png
- Kleeblattknoten: commons.wikimedia.org/wiki/File:Blue_Trefoil_Knot.png
- Achterknoten: commons.wikimedia.org/wiki/File:Blue_Figure-Eight_Knot.png
- 6_2-Knoten: commons.wikimedia.org/wiki/File:Blue_6_2_Knot.png

Abb. 1.12 Reidemeister-Züge: YAMASHITA Makoto (1, 2, 3)

Abb. 1.13 Kleeblattknoten, 3-Färbung: Jim.belk, commons.wikimedia.org/wiki/File:Tricoloring.png

Abb. 2.1 Doppeltorus: Oleg Alexandrov, commons.wikimedia.org/wiki/File:Double_torus_illustration.png

Symbolverzeichnis

Mengenoperationen

A^C Komplement der Menge A
$\mathcal{P}(M)$ Potenzmenge von M
$\overline{M}$ Abschluss der Menge M
∂M Rand der Menge M
M° Inneres der Menge M
$A \times B$ Kreuzprodukt zweier Mengen
$A \subseteq B$ Teilmengenbeziehung
$A \subsetneq B$ echte Teilmengenbeziehung
$A \setminus B$ A ohne B
$A \cup B$ Vereinigung
$A \dot{\cup} B$ Disjunkte Vereinigung
$A \cap B$ Schnitt

Zahlenmengen

$\mathbb{N}$ Natürliche Zahlen ($\{1, 2, 3, \dots\}$)
$\mathbb{Z}$ Ganze Zahlen ($\mathbb{N} \cup \{0, -1, -2, \dots\}$)
$\mathbb{Q}$ Rationale Zahlen ($\mathbb{Z} \cup \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$)
$\mathbb{R}$ Reele Zahlen ($\mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}, -\sqrt[3]{3}, \dots\}$)
$\mathbb{R}^+$ Echt positive reele Zahlen
$\mathbb{R}^\times$ Einheitengruppe von $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} \setminus \{0\}$)
$\mathbb{C}$ Komplexe Zahlen ($\{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$)
$\mathbb{P}$ Primzahlen ($2, 3, 5, 7, \dots$)

Gruppen

$\mathrm{Homöo}(X)$ Homöomorphismengruppe
$\mathrm{Iso}(X)$ Isometriengruppe

Weiteres

$\mathfrak{B}$ Basis einer Topologie
$\mathfrak{B}_\delta(x)$ δ-Kugel um x
$\mathfrak{T}$ Topologie

$\mathcal{P}$ Projektiver Raum
$\langle \cdot, \cdot \rangle$ Skalarprodukt
$X/_\sim$ X modulo $\sim$
$[x]_\sim$ Äquivalenzklassen von x bzgl. $\sim$
$\|x\|$ Norm von x
$|x|$ Betrag von x
S^n Sphäre
T^n Torus
π_X Projektion auf X
$f^{-1}(M)$ Urbild von M
$\mathrm{GL}_n(K)$ Allgemeine lineare Gruppe (general linear group)
$\mathrm{Rg}(M)$ Rang von M
$f|_U$ f eingeschränkt auf U
$[\gamma]$ Homotopieklasse eines Weges γ
$f : S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ Einbettung der Kreislinie in die Ebene

Index