Aufgabe 1

Teilaufgabe a

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 13 \\ 6 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 19 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotwahl

Lösung:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

durch scharfes hinsehen.

Nun L, R berechnen:

$$\begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 3 & 15 & 13 \\ 2 & 8 & 19 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \cdot(-\frac{1}{2}) \quad \cdot(-\frac{1}{3}) \\ + \\ \quad\quad\quad\quad + \end{array} \tag{1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 0 & 12 & 10 \\ 0 & 6 & 17 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \\ \cdot(-\frac{1}{2}) \\ + \end{array} \tag{2}$$

$$\cdot(-1) \quad + \qquad \cdot(-1) \quad +$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 0 & 12 & 10 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$\cdot(-\tfrac{10}{12}) \quad +$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 10 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \underline{\cdot \frac{1}{6}} & \underline{\cdot \frac{1}{12}} & \underline{\cdot \frac{1}{12}} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{10}{12} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{6} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{12} \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{12} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{\frac{1}{72} \begin{pmatrix} 12 & -6 & -1 \\ 0 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}}_{R} \tag{7}$$

ACHTUNG: Ich habe mich irgendwo verrechnet! Siehe WolframAlpha

Teilaufgabe b

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 12 \\ 4 & 1 & 4 \\ 12 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: A auf positive Definitheit untersuchen, ohne Eigenwerte zu berechnen.

Lösung: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt positiv Definit ...

$$\begin{aligned} \ldots &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : x^T A x > 0 \\ &\Leftrightarrow \text{Alle Eigenwerte sind größer als } 0 \end{aligned}$$

Falls A symmetrisch ist, gilt:

$$\begin{aligned} A \text{ ist pos. Definit} &\Leftrightarrow \text{alle führenden Hauptminore von } A \text{ sind positiv} \\ &\Leftrightarrow \text{es gibt eine Cholesky-Zerlegung } A = GG^T \text{ mit } G \text{ ist reguläre untere Dreiecksmatrix} \end{aligned}$$

Mit dem Hauptminor-Kriterium gilt:

$$\det(A_1) = 9 > 0 \tag{8}$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 16 < 0 \tag{9}$$

$$\Rightarrow A \text{ ist nicht positiv definit} \tag{10}$$

Aufgabe 2

Teilaufgabe a

Aufgabe Formulieren Sie einen Algorithmus in Pseudocode zum Lösen des Gleichungssystems

$$Ly = b,$$

wobei L eine invertierbare, untere Dreiecksmatrix ist.

Geben Sie die Formel zur Berechnung von y_i an.

Lösung: TODO!

Algorithm 1 Calculate Legendre symbol

```
Require: p ∈ ℙ, a ∈ ℤ, p ≥ 3
  procedure CalculateLegendre(a, p)
    if a ≥ p or a < 0 then                                        ▷ rule (III)
      return CalculateLegendre(a mod p, p)                        ▷ now: a ∈ [0, ..., p − 1]
    else if a == 0 or a == 1 then
      return a                                                    ▷ now: a ∈ [2, ..., p − 1]
    else if a == 2 then                                           ▷ rule (VII)
      if p ≡ ±1 mod 8 then
        return 1
      else
        return -1
      end if                                                      ▷ now: a ∈ [3, ..., p − 1]
    else if a == p − 1 then                                       ▷ rule (VI)
      if p ≡ 1 mod 4 then
        return 1
      else
        return -1
      end if                                                      ▷ now: a ∈ [3, ..., p − 2]
    else if !isPrime(a) then                                      ▷ rule (II)
      p_1, p_2, ..., p_n ← Factorize(a)
      return ∏_{i=1}^{n} CalculateLegendre(p_i, p)
    else                                                          ▷ now: a ∈ ℙ, √(p − 2) ≥ a ≥ 3
      if (p−1)/2 ≡ 0 mod 2 or (a−1)/2 ≡ 0 mod 2 then
        return CalculateLegendre(p, a)
      else
        return (−1) · CalculateLegendre(p, a)
      end if
    end if
  end procedure
```

Teilaufgabe b

Teilaufgabe c

1 Aufgabe 3

2 Aufgabe 4

3 Aufgabe 5