

Aufgabe 1

Teilaufgabe a

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 13 \\ 6 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 19 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotwahl

Lösung:

$$\begin{array}{ll}
 P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & A^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 13 \\ 6 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 19 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \\
 L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}, & A^{(1)} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 3 & 15 & 13 \\ 2 & 8 & 19 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \cdot (-\frac{1}{2}) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \cdot (-\frac{1}{3}) \\
 L^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, & A^{(2)} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 0 & 12 & 10 \\ 0 & 6 & 17 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \cdot (-\frac{1}{2}) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \\
 & A^{(3)} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 0 & 12 & 10 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Es gilt:

$$L^{(3)} \cdot L^{(2)} \cdot \underbrace{P^{(1)}}_{=:P} \cdot A^0 = \underbrace{A^{(3)}}_{=:R} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow PA = (L^{(3)} \cdot L^{(2)})^{-1} \cdot R \quad (2)$$

$$\Rightarrow L = (L^{(3)} \cdot L^{(2)})^{-1} \quad (3)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Nun gilt: $PA = LR = A^{(1)}$ (Kontrolle mit Wolfram|Alpha)

Teilaufgabe b**Gegeben:**

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 12 \\ 4 & 1 & 4 \\ 12 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: A auf positive Definitheit untersuchen, ohne Eigenwerte zu berechnen.**Vorüberlegung:** Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt positiv Definit ...

$$\begin{aligned} \dots &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : x^T A x > 0 \\ &\Leftrightarrow \text{Alle Eigenwerte sind größer als } 0 \end{aligned}$$

Falls A symmetrisch ist, gilt: A ist pos. Definit \Leftrightarrow alle führenden Hauptminore von A sind positiv \Leftrightarrow es gibt eine Cholesky-Zerlegung $A = GG^T$ mit G ist reguläre untere Dreiecksmatrix**Lösung 1: Hauptminor-Kriterium**

$$\det(A_1) = 9 > 0 \tag{5}$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 16 < 0 \tag{6}$$

$$\Rightarrow A \text{ ist nicht positiv definit} \tag{7}$$

Lösung 2: Cholesky-Zerlegung

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 3 \tag{8}$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{4}{3} \tag{9}$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{12}{3} = 4 \tag{10}$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \sqrt{\frac{4}{3} - \frac{16}{9}} = \sqrt{-\frac{4}{9}} \notin \mathbb{R} \tag{11}$$

$$\Rightarrow \text{Es ex. keine Cholesky-Zerlegung, aber } A \text{ ist symmetrisch} \tag{12}$$

$$\Rightarrow A \text{ ist nicht pos. Definit} \tag{13}$$

Aufgabe 2

Teilaufgabe a

Aufgabe Formulieren Sie einen Algorithmus in Pseudocode zum Lösen des Gleichungssystems

$$Ly = b,$$

wobei L eine invertierbare, untere Dreiecksmatrix ist.

Geben Sie die Formel zur Berechnung von y_i an.

Lösung:

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} \cdot y_k}{l_{ii}}$$

Algorithm 1 Calculate y in $Ly = b$

Require: Lower, invertable, triangular Matrix $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, Vektor b

```
procedure SOLVE( $L, b$ )  
  for  $i \in \{1, \dots, n\}$  do  
     $y_i \leftarrow b_i$   
    for  $k \in \{1, \dots, i-1\}$  do  
       $y_i \leftarrow y_i - l_{ik} \cdot y_k$   
    end for  
     $y_i \leftarrow \frac{y_i}{l_{ii}}$   
  end for  
end procedure
```

Teilaufgabe b

$$Ax = b \Leftrightarrow PAx = Pb \Leftrightarrow LRx = Pb$$

Algorithm 2 Löse ein LGS $Ax = b$

Require: Matrix A , Vektor b

```
procedure LOESELGS( $A, b$ )  
   $P, L, R \leftarrow \text{LRZER}(A)$   
   $b^* \leftarrow Pb$   
   $c \leftarrow \text{VORSUB}(L, b^*)$   
   $x \leftarrow \text{RUECKSUB}(R, c)$   
  return  $x$   
end procedure
```

Teilaufgabe c

Der Gesamtaufwand ist:

- LR-Zerlegung, $\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n^2$
- Vektormultiplikation, $2n$
- Vorwärtssubstitution, $\frac{1}{2}n^2$
- Rückwärtssubstitution, $\frac{1}{2}n^2$

Aufgabe 3

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 3 & \cos y \\ 3x^2 & e^y \end{pmatrix}$$

Und jetzt die Berechnung

$$f'(x, y) \cdot (x_0, y_0) = f(x, y)$$

LR-Zerlegung für $f'(x, y)$:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{9} & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$R = \begin{pmatrix} 3 & \cos y \\ 0 & e^y - x^2 \cos y \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$P = I_2 \tag{16}$$

$$-f\left(\frac{-1}{3}, 0\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{27} \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{7}{27} \end{pmatrix} \tag{18}$$

$$(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} \frac{5}{7} \\ \frac{2}{27} \end{pmatrix} \tag{19}$$

Aufgabe 4

Aufgabe:

$$I(f) = \int_a^b f(x) dx$$

1. Integrand am linken und am rechten Rand interpolieren
2. Interpolationspolynom mit Quadraturformel integrieren

Lösung:

Stützstellen:

$$(a, f(a)) \text{ und } (b, f(b))$$

\Rightarrow Polynom 1. Grades interpoliert diese

\Rightarrow Gerade $y = m \cdot x + t$ interpoliert

$$f(a) = a \cdot m + t \quad (20)$$

$$f(b) = b \cdot m + t \quad (21)$$

$$\Leftrightarrow t = f(a) - ma \quad (22)$$

$$t = f(b) - mb \quad (23)$$

$$\Rightarrow f(a) - ma = f(b) - mb \quad (24)$$

$$\Leftrightarrow f(a) - f(b) = ma - mb \quad (25)$$

$$\stackrel{a \neq b}{\Leftrightarrow} m = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \quad (26)$$

$$\Rightarrow t = f(a) - \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \cdot a \quad (27)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{f(a) \cdot a - f(a) \cdot b - f(a) \cdot a + f(b) \cdot a}{a - b} \quad (28)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-f(a) \cdot b + f(b) \cdot a}{a - b} \quad (29)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{f(a) \cdot b + f(b) \cdot a}{b - a} \quad (30)$$

Das Interpolationspolynom $p(x)$ lautet also

$$p(x) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \cdot x + \frac{f(a) \cdot b + f(b) \cdot a}{b - a}$$

Für Polynome ersten Grades benötigt man eine Quadraturformel vom Grad 2 (also NICHT die Rechteckregel).

Lösung 1: Mittelpunktsregel Die Mittelpunktsregel lautet

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) f\left(a + \frac{1}{2}(b-a)\right)$$

Damit ergibt sich

$$I(f) \approx (b-a) \underbrace{\left(\frac{f(a) - f(b)}{a-b} \cdot \left(a + \frac{1}{2}(b-a)\right) + \frac{f(a) \cdot b + f(b) \cdot a}{b-a} \right)}_{p\left(a + \frac{1}{2}(b-a)\right)}$$

Lösung 2: Trapezregel Die Trapezregel lautet

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b-a) \left(\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b) \right)$$

TODO: Mache das, wer will.

Teilaufgabe b)

Sei nun $f(x) = x^2$ und $a = 0$ sowie $b = 4$. Man soll die ermittelte Formel zwei mal auf äquidistanten Intervallen anwenden.

Lösung:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\frac{b-a}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{b-a}{2}}^b f(x) dx \quad (31)$$

$$\int_0^4 x^2 dx = \int_0^2 x^2 dx + \int_2^4 x^2 dx \quad (32)$$

$$\int_0^2 x^2 dx \approx (2-0) \left(\frac{f(0) - f(2)}{0-2} \cdot \left(0 + \frac{1}{2}(2-0)\right) + \frac{f(0) \cdot 2 + f(2) \cdot 0}{2-0} \right) \quad (33)$$

$$= 2 \cdot \frac{-4}{-2} = 2 \quad (34)$$

$$\int_2^4 x^2 dx \approx (4-2) \left(\frac{f(2) - f(4)}{2-4} \cdot \left(2 + \frac{1}{2}(4-2)\right) + \frac{f(2) \cdot 4 + f(4) \cdot 2}{4-2} \right) \quad (35)$$

$$= \text{TODO} \quad (36)$$

Aufgabe 5

Teilaufgabe a

Eine Quadraturformel $(b_i, c_i)_{i=1, \dots, s}$ hat die Ordnung p , falls sie exakte Lösungen für alle Polynome vom Grad $\leq p - 1$ liefert.

Teilaufgabe b

$$\sum_{i=1}^s b_i c_i^{q-1} = \frac{1}{q} \text{ für } q = 1, \dots, p$$

Teilaufgabe c

Aufgabe Bestimmen Sie zu den Knoten $c_1 = 0$ und $c_2 = \frac{2}{3}$ Gewichte, um eine Quadraturformel maximaler Ordnung zu erhalten. Wie hoch ist die Ordnung?

Lösung Die möglichen Quadraturformeln lauten:

$$Q(f) = (b-a) \sum_{i=1}^2 b_i f(a + c_i(b-a)) \quad (37)$$

$$= (b-a) \cdot \left(b_1 f(a) + b_2 f\left(a + \frac{2}{3}(b-a)\right) \right) \quad (38)$$

$\xRightarrow{\text{Satz 28}}$ Wenn wir Ordnung $s = 2$ fordern, sind die Gewichte eindeutig bestimmt. Die Trapezregel hat Ordnung 2 und $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$.

Nun gilt:

$$Q(f) = (b-a) \cdot \left(\frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f\left(a + \frac{2}{3}(b-a)\right) \right)$$

Aber für $f(x) = x$ ist $\int_0^3 x dx = [x^2]_0^3 = 9 \neq 6 = 3 \cdot 2 = Q(f)$.

\Rightarrow Es gibt keine Quadraturformel mit diesen Knoten und Ordnung 2.

Für Ordnung 1 müssen wir nur Konstanten korrekt interpolieren, also

$$\int_a^b c dx = [cx]_a^b \quad (39)$$

$$= (b - a) \cdot c \quad (40)$$

$$= (b - a) \cdot f(x) \text{ mit } x \text{ beliebig} \quad (41)$$

Daher wählt man $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$. Dies ist eine Quadraturformel erster Ordnung. Da es keine Quadraturformel mit diesen Knoten von Ordnung 2 gibt, ist das die höchst mögliche Ordnung.