

Aufgabe 1

Teilaufgabe a

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 13 \\ 6 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 19 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: LR-Zerlegung von A mit Spaltenpivotwahl

Lösung:

$$\begin{array}{ll} P^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & A^{(0)} = \begin{pmatrix} 3 & 15 & 13 \\ 6 & 6 & 6 \\ 2 & 8 & 19 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \\ L^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}, & A^{(1)} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 3 & 15 & 13 \\ 2 & 8 & 19 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \cdot (-\frac{1}{2}) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \cdot (-\frac{1}{3}) \\ L^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}, & A^{(2)} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 0 & 12 & 10 \\ 0 & 6 & 17 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow \cdot (-\frac{1}{2}) \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \\ & A^{(3)} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 0 & 12 & 10 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \end{array}$$

Es gilt:

$$L^{(3)} \cdot L^{(2)} \cdot \underbrace{P^{(1)}}_{=:P} \cdot A^0 = \underbrace{A^{(3)}}_{=:R} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow PA = (L^{(3)} \cdot L^{(2)})^{-1} \cdot R \quad (2)$$

$$\Rightarrow L = (L^{(3)} \cdot L^{(2)})^{-1} \quad (3)$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Nun gilt: $PA = LR = A^{(1)}$ (Kontrolle mit Wolfram|Alpha)

Teilaufgabe b

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 12 \\ 4 & 1 & 4 \\ 12 & 4 & 17 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: A auf positive Definitheit untersuchen, ohne Eigenwerte zu berechnen.

Lösung: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt positiv Definit ...

$$\begin{aligned} \dots &\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}^n : x^T A x > 0 \\ &\Leftrightarrow \text{Alle Eigenwerte sind größer als } 0 \end{aligned}$$

Falls A symmetrisch ist, gilt:

A ist pos. Definit \Leftrightarrow alle führenden Hauptminore von A sind positiv

\Leftrightarrow es gibt eine Cholesky-Zerlegung $A = GG^T$ mit G ist reguläre untere Dreiecksmatrix

Lösung 1: Hauptminor-Kriterium

$$\det(A_1) = 9 > 0 \tag{5}$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 9 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 9 - 16 < 0 \tag{6}$$

$$\Rightarrow A \text{ ist nicht positiv definit} \tag{7}$$

Lösung 2: Cholesky-Zerlegung

$$l_{11} = \sqrt{a_{11}} = 3 \tag{8}$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{4}{3} \tag{9}$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = 4 \tag{10}$$

$$l_{22} = \sqrt{a_{22} - l_{21}^2} = \frac{2\sqrt{5}}{3} \tag{11}$$

$$\dots \tag{12}$$

ACHTUNG: Noch nicht fertig! Irgendwo muss was negatives unter einer Wurzel kommen!

Aufgabe 2

Teilaufgabe a

Aufgabe Formulieren Sie einen Algorithmus in Pseudocode zum Lösen des Gleichungssystems

$$Ly = b,$$

wobei L eine invertierbare, untere Dreiecksmatrix ist.

Geben Sie die Formel zur Berechnung von y_i an.

Lösung:

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{k=i}^{i-1} l_{ik} \cdot y_k}{l_{ii}}$$

Teilaufgabe b

$$Ax = b \rightarrow PAx = Pb \rightarrow LRx = Pb$$

Pseudocode:

Algorithm 1 Calculate TODO

Require: Matrix A , Vektor b

```
procedure CALCULATELEGENDRE( $A, b$ )  
   $P, L, R \leftarrow \text{LRZERLEGUNG}(A)$   
   $b^* \leftarrow Pb$   
   $c \leftarrow \text{VORWÄRTSSUBSTITUTION}(L, b^*)$   
   $x \leftarrow \text{RÜCKWÄRTSSUBSTITUTION}(R, c)$   
  return  $x$   
end procedure
```

Teilaufgabe c

Der Gesamtaufwand ist:

- LR-Zerlegung, $\frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{3}n^2$
- Vektormultiplikation, $2n$
- Vorwärtssubstitution, $\frac{1}{2}n^2$
- Rückwärtssubstitution, $\frac{1}{2}n^2$

Aufgabe 3

$$f'(x, y) = \begin{pmatrix} 3 & \cos y \\ 3x^2 & e^y \end{pmatrix}$$

Und jetzt die Berechnung

$$f'(x, y) \cdot (x_0, y_0) = f(x, y)$$

LR-Zerlegung für $f'(x, y)$:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{9} & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

$$R = \begin{pmatrix} 3 & \cos y \\ 0 & e^y - x^2 \cos y \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$P = I_2 \tag{15}$$

$$-f\left(\frac{-1}{3}, 0\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{27} \end{pmatrix} \tag{16}$$

$$c = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{7}{27} \end{pmatrix} \tag{17}$$

$$(x_1, y_1) = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{7}{27} \end{pmatrix} \tag{18}$$

Aufgabe 4

Aufgabe 5

Teilaufgabe a

Die Ordnung n einer Quadraturformel gibt an, dass diese Polynome bis zum Grad $\leq n-1$ exakt löst.

Teilaufgabe b

Teilaufgabe c