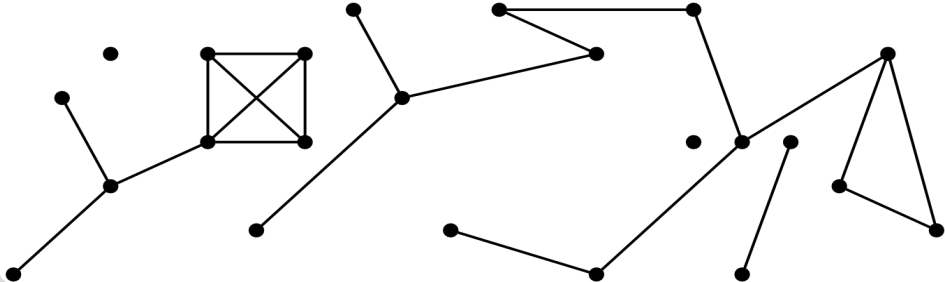


# Graphentheorie I

Martin Thoma | 2. Juli 2013

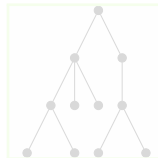
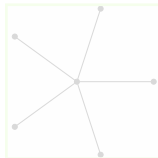
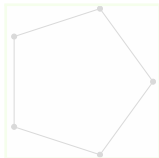
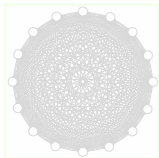
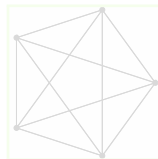
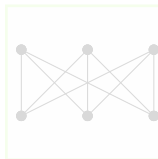
INSTITUT FÜR STOCHASTIK



- 1 Grundlagen
- 2 Spezielle Graphen
- 3 Strukturen in Graphen
- 4 Königsberger Brückenproblem
- 5 Ende

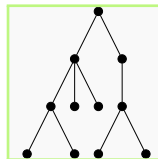
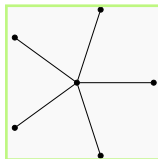
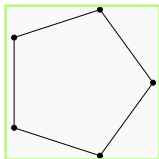
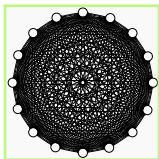
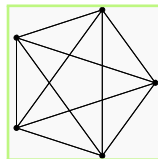
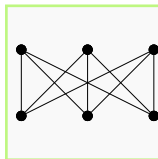
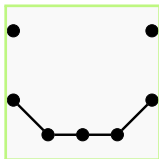
## Graph

Ein Graph ist ein Tupel  $(E, K)$ , wobei  $E \neq \emptyset$  die Eckenmenge und  $K \subseteq E \times E$  die Kantenmenge bezeichnet.



## Graph

Ein Graph ist ein Tupel  $(E, K)$ , wobei  $E \neq \emptyset$  die Eckenmenge und  $K \subseteq E \times E$  die Kantenmenge bezeichnet.



Knoten  $\Leftrightarrow$  Ecken

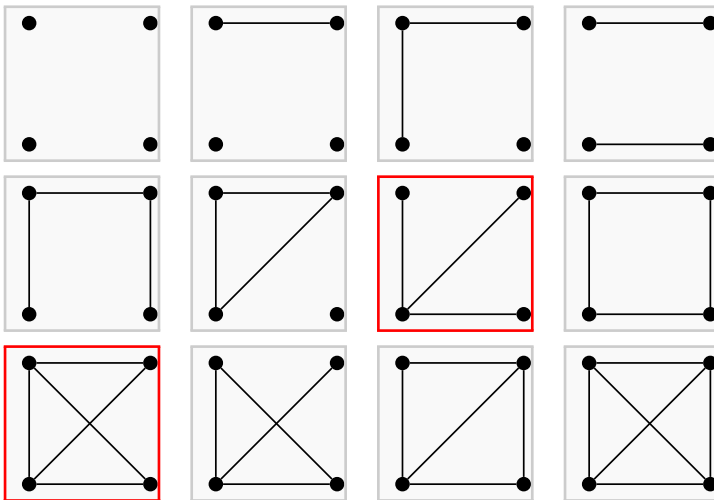
[martin-thoma.de/uni/graph.html](http://martin-thoma.de/uni/graph.html)

# Aufgabe 1

Zeichnen Sie alle Graphen mit genau vier Ecken.

# Aufgabe 1

Zeichnen Sie alle Graphen mit genau vier Ecken.

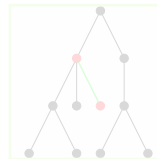
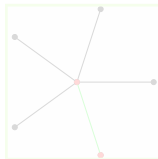
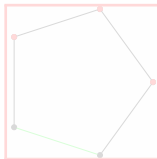
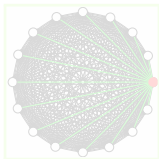
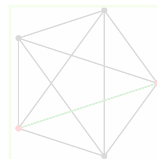
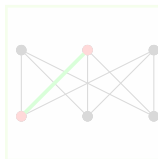
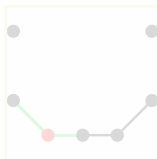




## Inzidenz

Sei  $e \in E$  und  $k = \{e_1, e_2\} \in K$ .

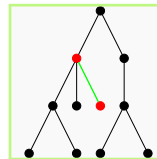
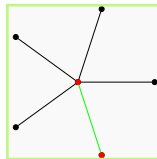
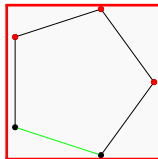
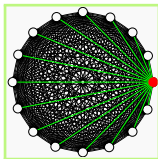
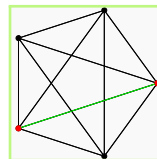
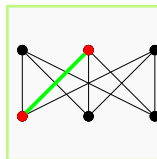
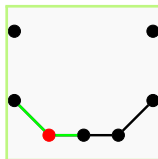
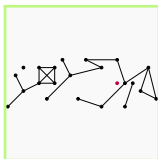
$e$  heißt **inzident** zu  $k : \Leftrightarrow e = e_1$  oder  $e = e_2$



## Inzidenz

Sei  $e \in E$  und  $k = \{e_1, e_2\} \in K$ .

$e$  heißt **inzident** zu  $k : \Leftrightarrow e = e_1$  oder  $e = e_2$

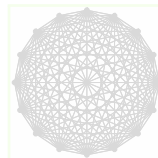
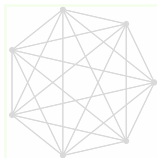
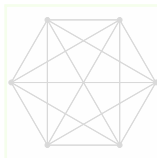
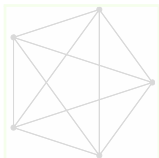
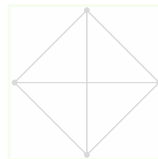
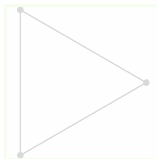
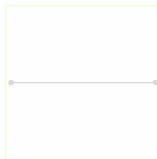
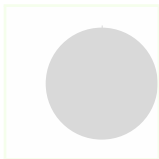


## Vollständiger Graph

Sei  $G = (E, K)$  ein Graph.

$G$  heißt **vollständig**  $:\Leftrightarrow E \times E \setminus \{e \in E : \{e, e\}\}$

Ein vollständiger Graph mit  $n$  Ecken wird als  $K_n$  bezeichnet.

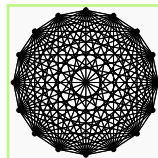
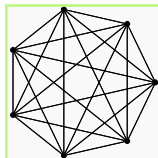
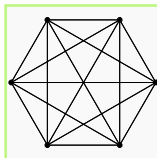
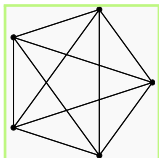
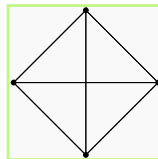
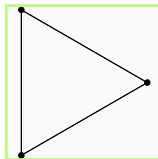
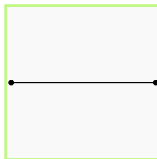
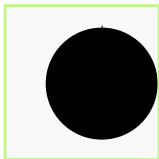


## Vollständiger Graph

Sei  $G = (E, K)$  ein Graph.

$G$  heißt **vollständig**  $:\Leftrightarrow E \times E \setminus \{e \in E : \{e, e\}\}$

Ein vollständiger Graph mit  $n$  Ecken wird als  $K_n$  bezeichnet.

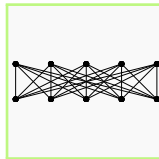
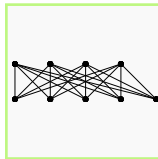
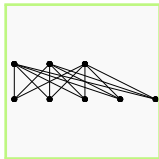
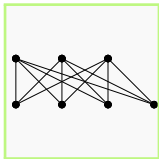
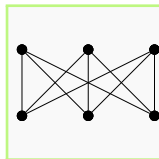
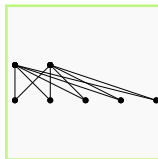
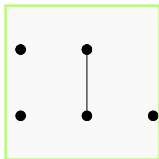
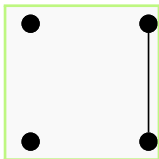


## Bipartite Graphen

Sei  $G = (E, K)$  ein Graph und  $A, B \subset V$  zwei disjunkte Eckenmengen mit  $E \setminus A = B$ .

$G$  heißt **bipartit**

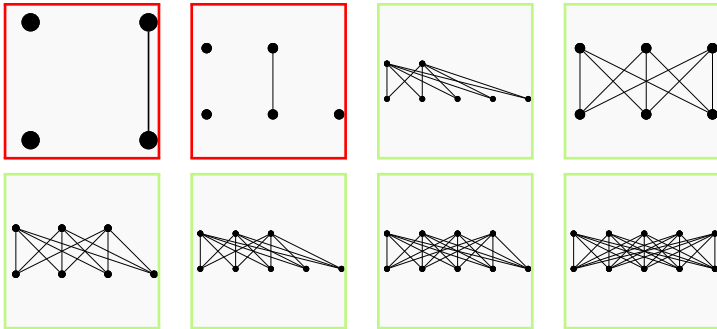
$:\Leftrightarrow \forall_{k=\{e_1, e_2\} \in K} : (e_1 \in A \text{ und } e_2 \in B) \text{ oder } (e_1 \in B \text{ und } e_2 \in A)$



## Vollständig bipartite Graphen

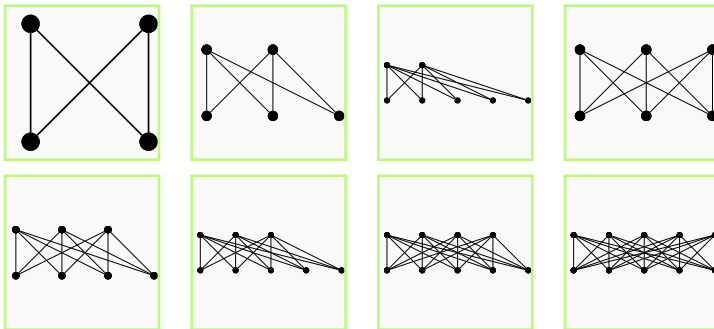
Sei  $G = (E, K)$  ein bipartiter Graph und  $\{A, B\}$  bezeichne die Bipartition.

$G$  heißt **vollständig bipartit**  $:\Leftrightarrow \{\{a, b\} \mid a \in A \wedge b \in B\} = K$



# Vollständig bipartite Graphen

Bezeichnung: Vollständig bipartite Graphen mit der Bipartition  $\{A, B\}$  bezeichnet man mit  $K_{|A|,|B|}$ .



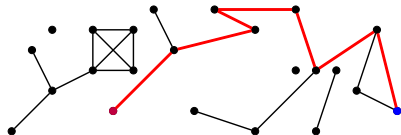
## Kantenzug

Sei  $G = (E, K)$  ein Graph.

Dann heißt eine Folge  $k_1, k_2, \dots, k_s$  von Kanten, zu denen es Ecken  $e_0, e_1, e_2, \dots, e_s$  gibt, so dass

- $k_1 = \{ e_0, e_1 \}$
- $k_2 = \{ e_1, e_2 \}$
- ...
- $k_s = \{ e_{s-1}, e_s \}$

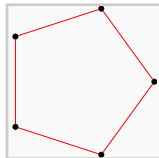
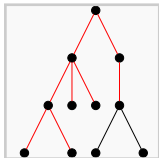
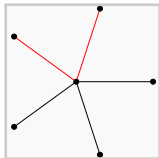
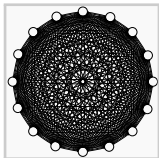
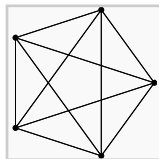
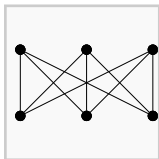
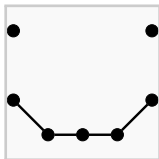
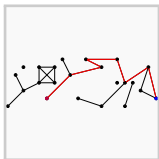
gilt ein **Kantenzug**, der  $e_0$  und  $e_s$  **verbindet** und  $s$  seine **Länge**.





## Geschlossener Kantenzug

Sei  $G = (E, K)$  ein Graph und  $A = (e_0, e_1, \dots, e_s)$  ein Kantenzug.  
 A heißt **geschlossen** : $\Leftrightarrow e_s = e_0$  .



## Weg

Sei  $G = (E, K)$  ein Graph und  $A = (k_1, k_2 \dots, k_s)$  ein Kantenzug.  
A heißt **Weg**  $:\Leftrightarrow \forall_{i,j \in 1, \dots, s} : i \neq j \Rightarrow k_i \neq k_j$ .

## Salopp

Ein Kantenzug, bei dem man keine Kante mehrfach abläuft, ist ein Weg.

Achtung: Knoten dürfen mehrfach abgelaufen werden!

## Weg

Sei  $G = (E, K)$  ein Graph und  $A = (k_1, k_2 \dots, k_s)$  ein Kantenzug.  
A heißt **Weg**  $:\Leftrightarrow \forall_{i,j \in 1, \dots, s} : i \neq j \Rightarrow k_i \neq k_j$ .

## Salopp

Ein Kantenzug, bei dem man keine Kante mehrfach abläuft, ist ein Weg.

Achtung: Knoten dürfen mehrfach abgelaufen werden!

## Weg

Sei  $G = (E, K)$  ein Graph und  $A = (k_1, k_2 \dots, k_s)$  ein Kantenzug.  
A heißt **Weg**  $:\Leftrightarrow \forall_{i,j \in 1, \dots, s} : i \neq j \Rightarrow k_i \neq k_j$ .

## Salopp

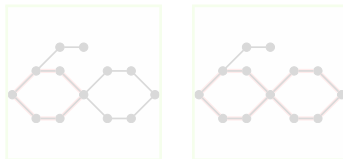
Ein Kantenzug, bei dem man keine Kante mehrfach abläuft, ist ein Weg.

Achtung: Knoten dürfen mehrfach abgelaufen werden!

## Kreis

Sei  $G = (E, K)$  ein Graph und  $A = (k_1, k_2, \dots, k_s)$  ein Kantenzug.  
 A heißt **Kreis** : $\Leftrightarrow$  A ist geschlossen und ein Weg.

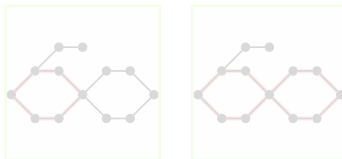
Manchmal wird das auch „einfacher Kreis“ genannt.



## Kreis

Sei  $G = (E, K)$  ein Graph und  $A = (k_1, k_2, \dots, k_s)$  ein Kantenzug.  
 A heißt **Kreis**  $:\Leftrightarrow A$  ist geschlossen und ein Weg.

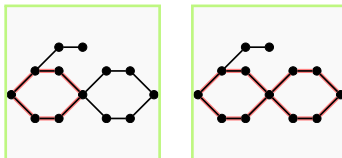
Manchmal wird das auch „einfacher Kreis“ genannt.



## Kreis

Sei  $G = (E, K)$  ein Graph und  $A = (k_1, k_2, \dots, k_s)$  ein Kantenzug.  $A$  heißt **Kreis**  $:\Leftrightarrow A$  ist geschlossen und ein Weg.

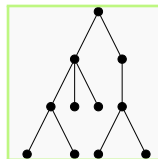
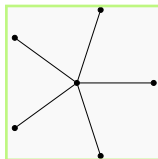
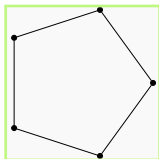
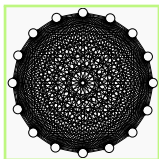
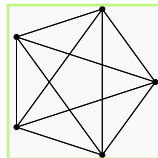
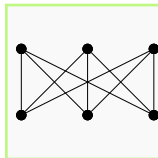
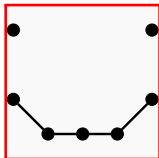
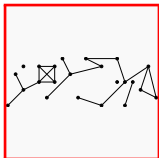
Manchmal wird das auch „einfacher Kreis“ genannt.



## Zusammenhängender Graph

Sei  $G = (E, K)$  ein Graph.

$G$  heißt **zusammenhängend**  $:\Leftrightarrow \forall e_1, e_2 \in E$  : Es ex. ein Kantenzug, der  $e_1$  und  $e_2$  verbindet



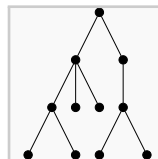
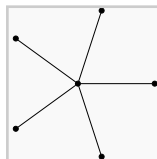
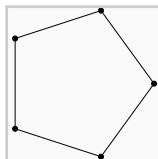
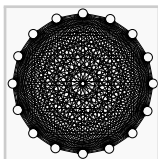
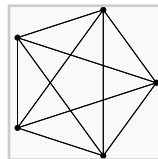
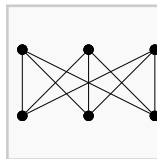
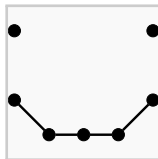
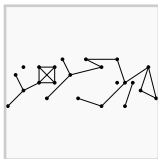


## Grad einer Ecke

Der **Grad** einer Ecke ist die Anzahl der Kanten, die von dieser Ecke ausgehen.

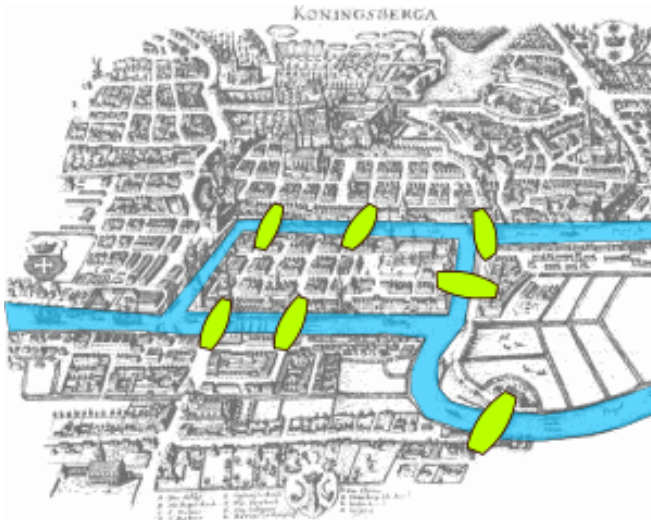
## Isolierte Ecken

Hat eine Ecke den Grad 0, so nennt man ihn **isoliert**.

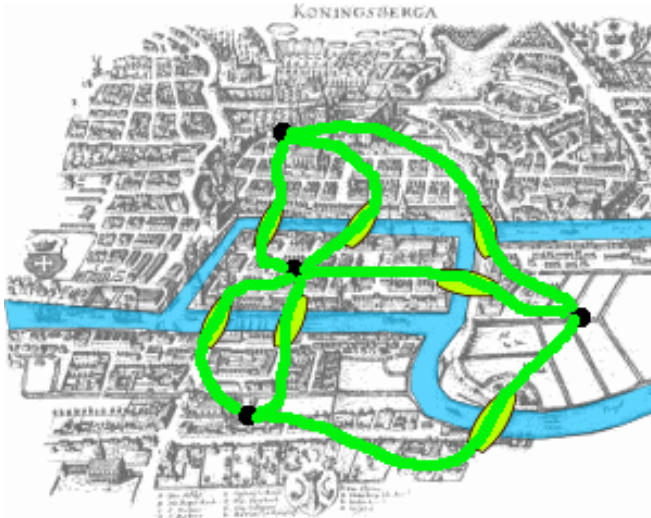




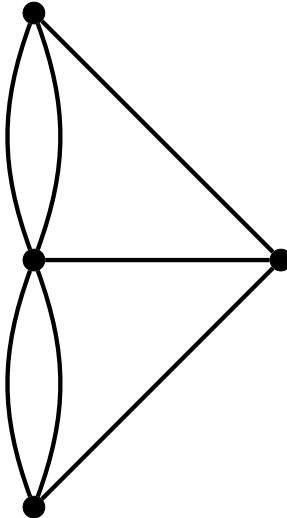
# Königsberger Brückenproblem



# Übersetzung in einen Graphen



# Übersetzung in einen Graphen



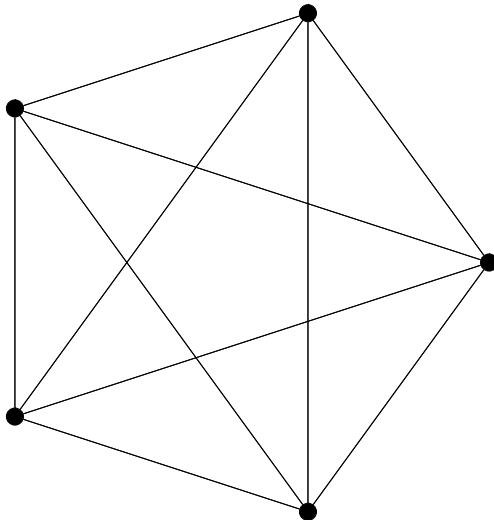
## Eulerscher Kreis

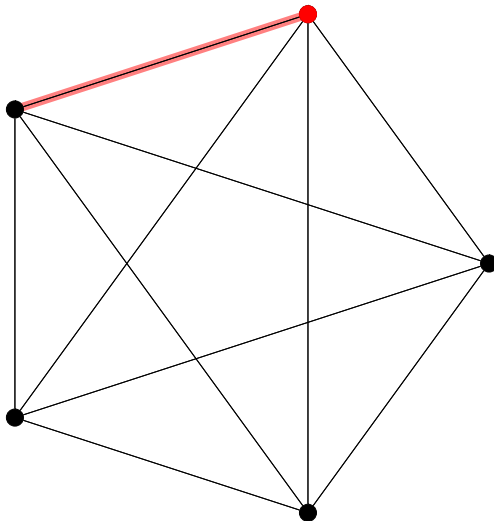
Sei  $G$  ein Graph und  $A$  ein Kreis in  $G$ .

$A$  heißt **eulerscher Kreis**  $:\Leftrightarrow \forall_{e \in E} : e \in A$ .

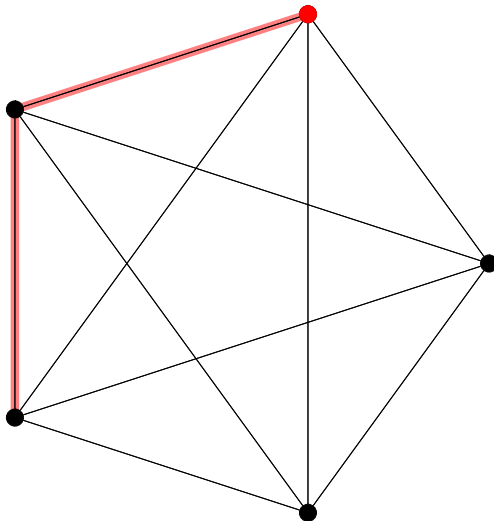
## Eulerscher Graph

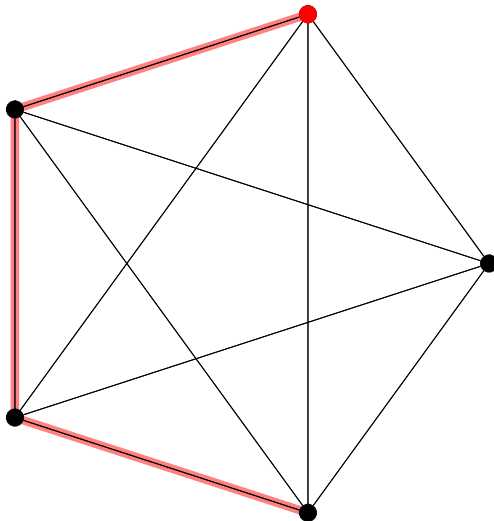
Ein Graph heißt **eulersch**, wenn er einen eulerschen Kreis enthält.

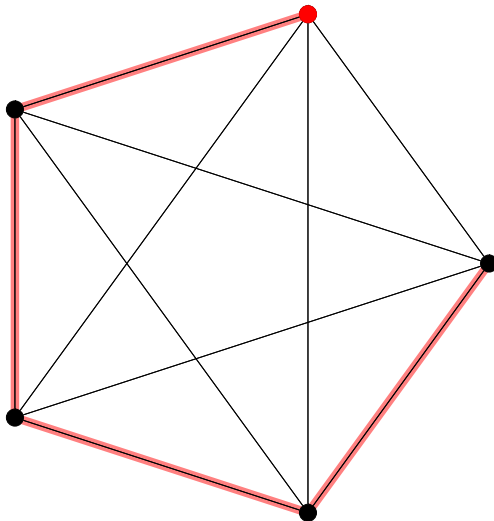


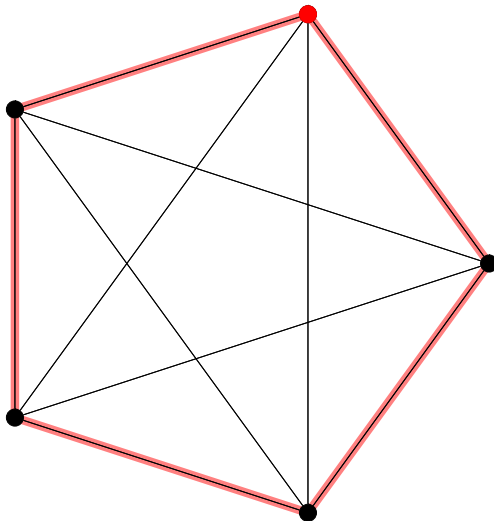


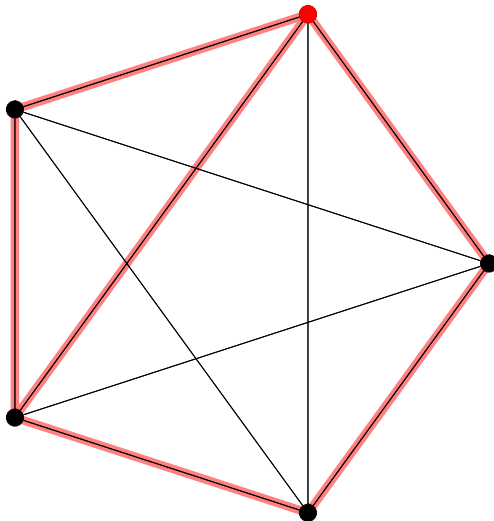


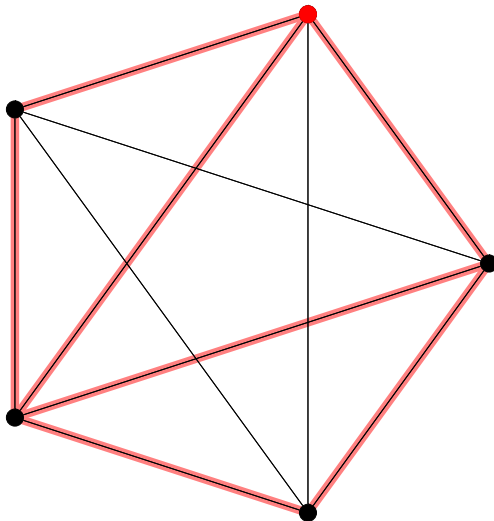


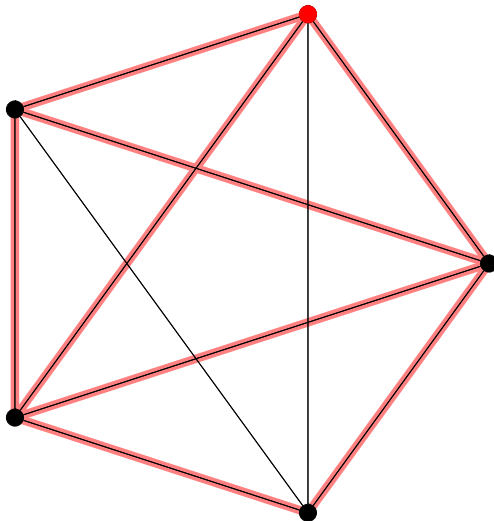


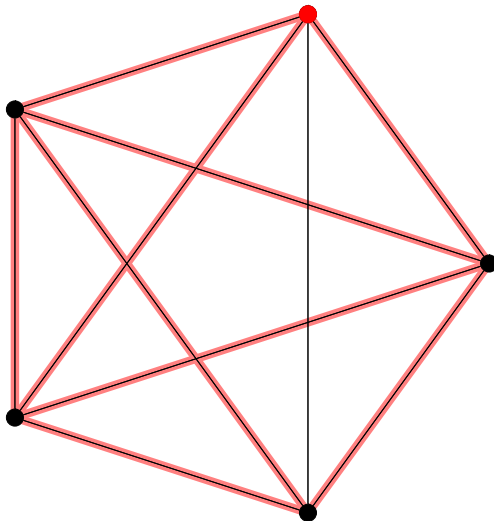




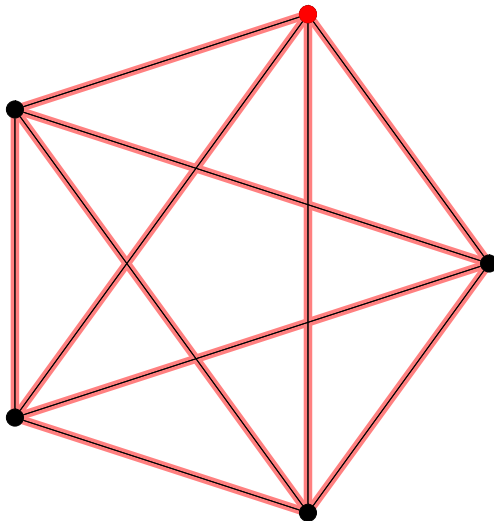








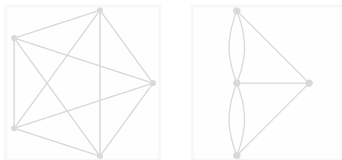




## Satz von Euler

Wenn ein Graph  $G$  eulersch ist, dann hat jede Ecke von  $G$  geraden Grad.

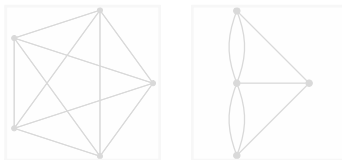
⇒ Wenn  $G$  eine Ecke mit ungeraden Grad hat, ist  $G$  nicht eulersch.



## Satz von Euler

Wenn ein Graph  $G$  eulersch ist, dann hat jede Ecke von  $G$  geraden Grad.

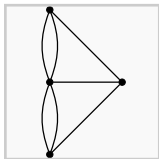
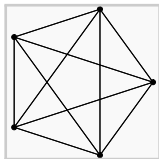
⇒ Wenn  $G$  eine Ecke mit ungeraden Grad hat, ist  $G$  nicht eulersch.



## Satz von Euler

Wenn ein Graph  $G$  eulersch ist, dann hat jede Ecke von  $G$  geraden Grad.

⇒ Wenn  $G$  eine Ecke mit ungeraden Grad hat, ist  $G$  nicht eulersch.



**Beh.:**  $G$  ist eulersch  $\Rightarrow \forall e \in E : \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

**Bew.:** Eulerkreis geht durch jede Ecke  $e \in E$ ,  
also geht der Eulerkreis (eventuell mehrfach) in  $e$  hinein und hinaus  
 $\Rightarrow \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

**Beh.:**  $G$  ist eulersch  $\Rightarrow \forall e \in E : \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

**Bew.:** Eulerkreis geht durch jede Ecke  $e \in E$ ,

also geht der Eulerkreis (eventuell mehrfach) in  $e$  hinein und hinaus

$\Rightarrow \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

**Beh.:**  $G$  ist eulersch  $\Rightarrow \forall e \in E : \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

**Bew.:** Eulerkreis geht durch jede Ecke  $e \in E$ ,  
also geht der Eulerkreis (eventuell mehrfach) in  $e$  hinein und hinaus  
 $\Rightarrow \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

**Beh.:**  $G$  ist eulersch  $\Rightarrow \forall e \in E : \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

**Bew.:** Eulerkreis geht durch jede Ecke  $e \in E$ ,  
also geht der Eulerkreis (eventuell mehrfach) in  $e$  hinein und hinaus  
 $\Rightarrow \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$



## Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen  $G$  jede Ecke geraden Grad hat, dann ist  $G$  eulersch.

Beweis per Induktion

TODO

## Offene eulersche Linie

Sei  $G$  ein Graph und  $A$  ein Weg, der kein Kreis ist.

$A$  heißt **offene eulersche Linie** von  $G$  : $\Leftrightarrow$  Jede Kante in  $G$  kommt genau ein mal in  $A$  vor.

Ein Graph kann genau dann „in einem Zug“ gezeichnet werden, wenn er eine offene eulersche Linie besitzt.

## Satz 8.2.3

Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph.  
 $G$  hat eine offene eulersche Linie  $:\Leftrightarrow G$  hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „ $\Rightarrow$ “

Sei  $G = (E, K)$  ein zusammenhängender Graph und  $L = (e_0, \dots, e_s)$  eine offene eulersche Linie. Sei  $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$ . Es gibt einen Eulerkreis in  $G^*$

Satz von Euler  
 $\Rightarrow$  In  $G^*$  hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht  
 $\Rightarrow$  in  $G$  haben genau 2 Ecken ungeraden Grad ■

## Satz 8.2.3

Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph.

$G$  hat eine offene eulersche Linie  $:\Leftrightarrow G$  hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

## Beweis „ $\Rightarrow$ “

Sei  $G = (E, K)$  ein zusammenhängender Graph und  $L = (e_0, \dots, e_s)$  eine offene eulersche Linie. Sei  $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$ . Es gibt einen Eulerkreis in  $G^*$

Satz von Euler  
 $\Rightarrow$  In  $G^*$  hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

$\Rightarrow$  in  $G$  haben genau 2 Ecken ungeraden Grad ■

## Satz 8.2.3

Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph.

$G$  hat eine offene eulersche Linie  $:\Leftrightarrow G$  hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

## Beweis „ $\Rightarrow$ “

Sei  $G = (E, K)$  ein zusammenhängender Graph und  $L = (e_0, \dots, e_s)$  eine offene eulersche Linie. Sei  $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$ . Es gibt einen Eulerkreis in  $G^*$

Satz von Euler  
 $\Rightarrow$  In  $G^*$  hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

$\Rightarrow$  in  $G$  haben genau 2 Ecken ungeraden Grad ■

## Satz 8.2.3

Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph.

$G$  hat eine offene eulersche Linie  $:\Leftrightarrow G$  hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

## Beweis „ $\Rightarrow$ “

Sei  $G = (E, K)$  ein zusammenhängender Graph und  $L = (e_0, \dots, e_s)$  eine offene eulersche Linie. Sei  $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$ . Es gibt einen Eulerkreis in  $G^*$

Satz von Euler  
 $\Rightarrow$  In  $G^*$  hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

$\Rightarrow$  in  $G$  haben genau 2 Ecken ungeraden Grad ■

## Satz 8.2.3

Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph.

$G$  hat eine offene eulersche Linie  $:\Leftrightarrow G$  hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

## Beweis „ $\Rightarrow$ “

Sei  $G = (E, K)$  ein zusammenhängender Graph und  $L = (e_0, \dots, e_s)$  eine offene eulersche Linie. Sei  $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$ . Es gibt einen Eulerkreis in  $G^*$

Satz von Euler  
 $\Rightarrow$  In  $G^*$  hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

$\Rightarrow$  in  $G$  haben genau 2 Ecken ungeraden Grad ■

## Satz 8.2.3

Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph.

$G$  hat eine offene eulersche Linie  $:\Leftrightarrow G$  hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

## Beweis „ $\Rightarrow$ “

Sei  $G = (E, K)$  ein zusammenhängender Graph und  $L = (e_0, \dots, e_s)$  eine offene eulersche Linie. Sei  $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$ . Es gibt einen Eulerkreis in  $G^*$

Satz von Euler  
 $\Rightarrow$  In  $G^*$  hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

$\Rightarrow$  in  $G$  haben genau 2 Ecken ungeraden Grad ■



## Satz 8.2.3

Sei  $G$  ein zusammenhängender Graph.

$G$  hat eine offene eulersche Linie  $:\Leftrightarrow G$  hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

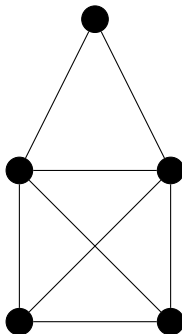
## Beweis „ $\Rightarrow$ “

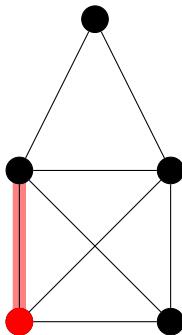
Sei  $G = (E, K)$  ein zusammenhängender Graph und  $L = (e_0, \dots, e_s)$  eine offene eulersche Linie. Sei  $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$ . Es gibt einen Eulerkreis in  $G^*$

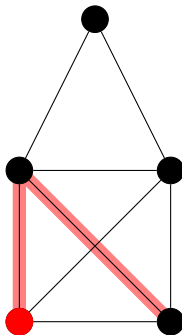
Satz von Euler  
 $\Rightarrow$  In  $G^*$  hat jede Ecke geraden Grad

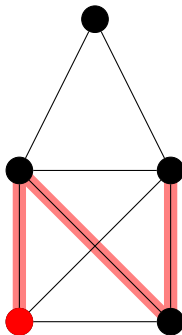
Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

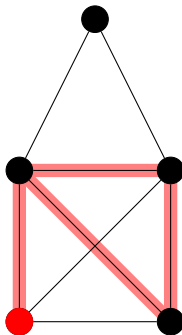
$\Rightarrow$  in  $G$  haben genau 2 Ecken ungeraden Grad ■

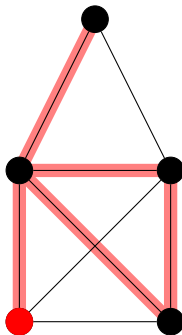


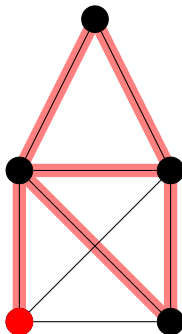




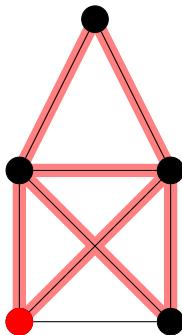


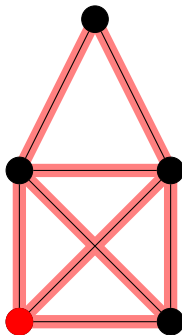












- [http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Konigsberg\\_bridges.png](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Konigsberg_bridges.png)
- [Google Maps](#) (Grafiken ©2013 Cnes/Spot Image, DigitalGlobe)