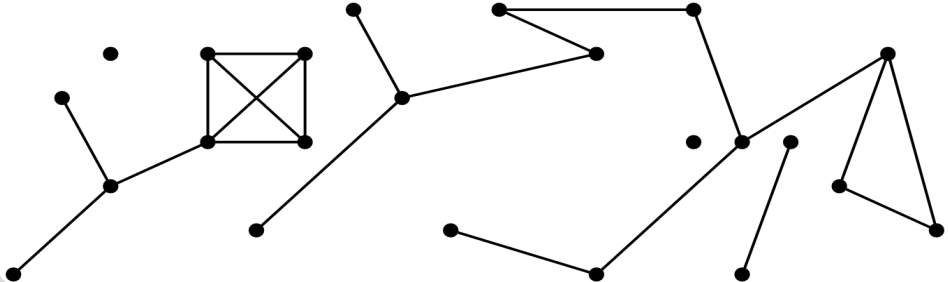


Graphentheorie I

Martin Thoma | 2. Juli 2013

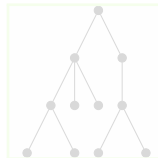
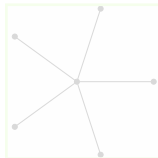
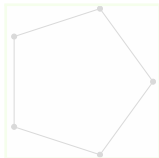
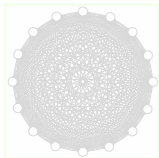
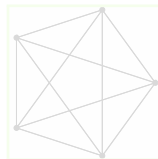
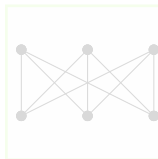
INSTITUT FÜR STOCHASTIK



- 1 Grundlagen
- 2 Spezielle Graphen
- 3 Strukturen in Graphen
- 4 Königsberger Brückenproblem
- 5 Ende

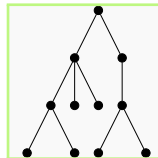
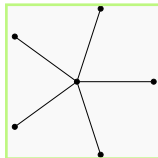
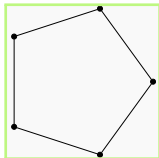
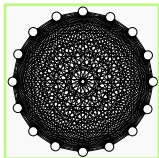
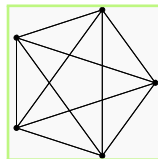
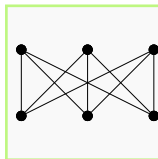
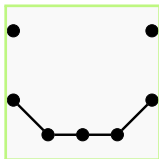
Graph

Ein Graph ist ein Tupel (E, K) , wobei $E \neq \emptyset$ die Eckenmenge und $K \subseteq E \times E$ die Kantenmenge bezeichnet.



Graph

Ein Graph ist ein Tupel (E, K) , wobei $E \neq \emptyset$ die Eckenmenge und $K \subseteq E \times E$ die Kantenmenge bezeichnet.



Knoten \Leftrightarrow Ecken

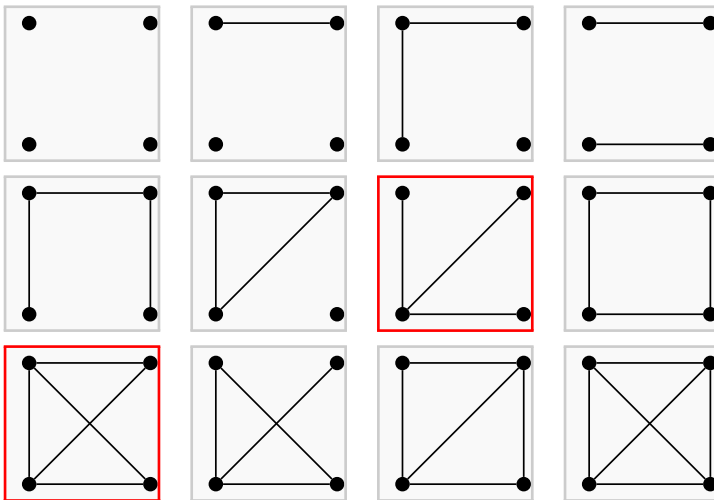
martin-thoma.de/uni/graph.html

Aufgabe 1

Zeichnen Sie alle Graphen mit genau vier Ecken.

Aufgabe 1

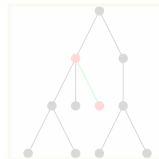
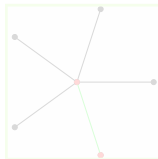
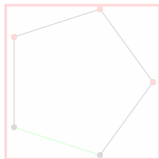
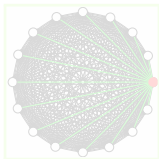
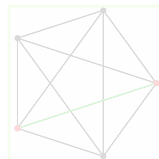
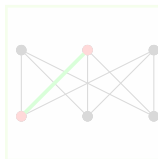
Zeichnen Sie alle Graphen mit genau vier Ecken.



Inzidenz

Sei $e \in E$ und $k = \{e_1, e_2\} \in K$.

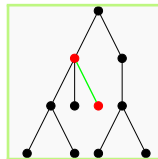
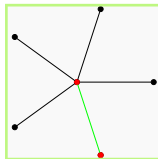
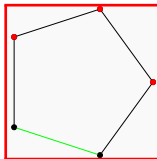
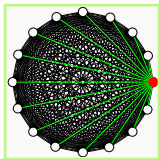
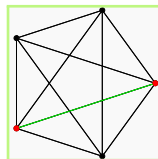
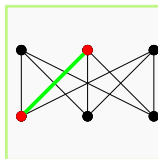
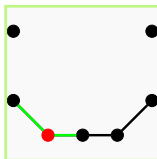
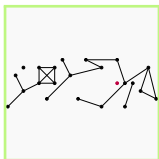
e heißt **inzident** zu $k : \Leftrightarrow e = e_1$ oder $e = e_2$



Inzidenz

Sei $e \in E$ und $k = \{e_1, e_2\} \in K$.

e heißt **inzident** zu $k : \Leftrightarrow e = e_1$ oder $e = e_2$

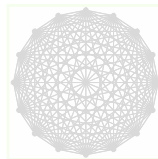
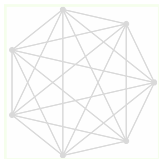
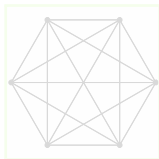
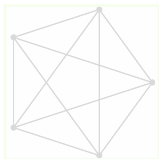
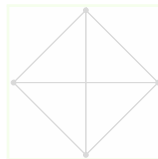
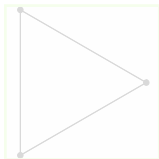
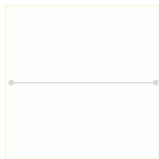
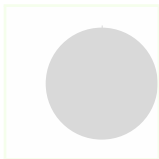


Vollständiger Graph

Sei $G = (E, K)$ ein Graph.

G heißt **vollständig** $:\Leftrightarrow K = E \times E \setminus \{e \in E : \{e, e\}\}$

Ein vollständiger Graph mit n Ecken wird als K_n bezeichnet.

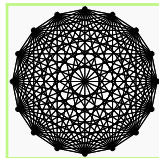
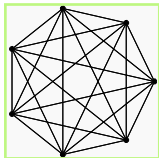
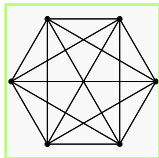
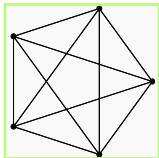
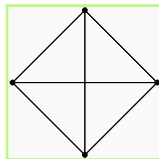
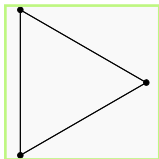
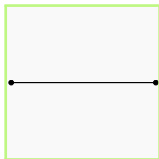
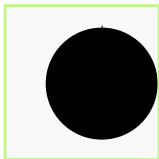


Vollständiger Graph

Sei $G = (E, K)$ ein Graph.

G heißt **vollständig** $:\Leftrightarrow K = E \times E \setminus \{e \in E : \{e, e\}\}$

Ein vollständiger Graph mit n Ecken wird als K_n bezeichnet.

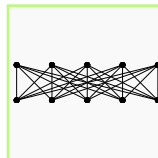
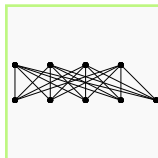
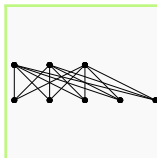
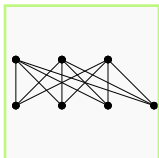
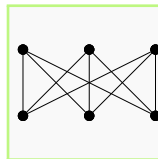
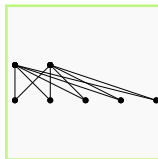
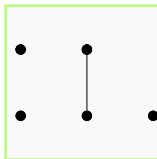
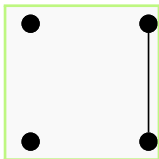


Bipartiter Graph

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A, B \subset E$ zwei disjunkte Eckenmengen mit $E \setminus A = B$.

G heißt **bipartit**

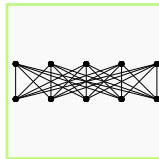
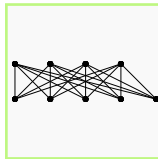
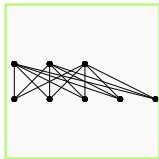
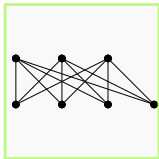
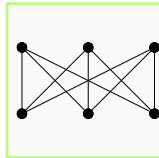
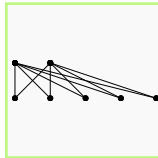
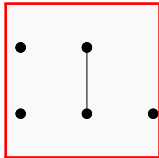
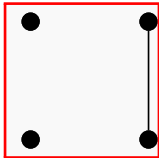
$:\Leftrightarrow \forall_{k=\{e_1, e_2\} \in K} : (e_1 \in A \text{ und } e_2 \in B) \text{ oder } (e_1 \in B \text{ und } e_2 \in A)$



Vollständig bipartiter Graph

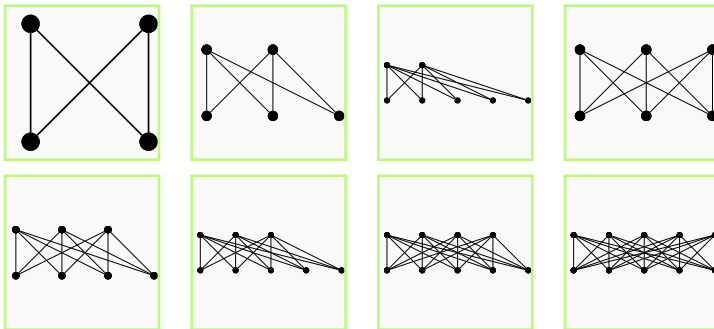
Sei $G = (E, K)$ ein bipartiter Graph und $\{A, B\}$ bezeichne die Bipartition.

G heißt **vollständig bipartit** $:\Leftrightarrow A \times B = K$



Vollständig bipartite Graphen

Bezeichnung: Vollständig bipartite Graphen mit der Bipartition $\{A, B\}$ bezeichnet man mit $K_{|A|,|B|}$.



Wie viele Ecken und wie viele Kanten hat der $K_{m,n}$?

Wie viele Ecken und wie viele Kanten hat der $K_{m,n}$?

$$\text{Ecken: } m + n \quad (1)$$

$$\text{Kanten: } m \cdot n \quad (2)$$

Kantenzug, Länge eines Kantenzuges und Verbindung von Ecken

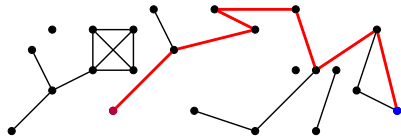
Kantenzug, Länge eines Kantenzuges und Verbindung von Ecken

Sei $G = (E, K)$ ein Graph.

Dann heißt eine Folge k_1, k_2, \dots, k_s von Kanten, zu denen es Ecken $e_0, e_1, e_2, \dots, e_s$ gibt, so dass

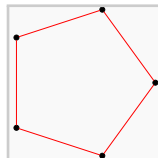
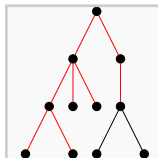
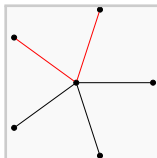
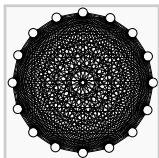
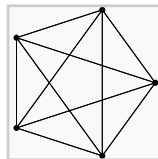
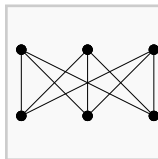
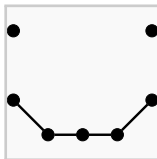
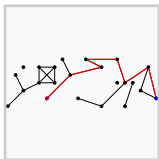
- $k_1 = \{ e_0, e_1 \}$
- $k_2 = \{ e_1, e_2 \}$
- ...
- $k_s = \{ e_{s-1}, e_s \}$

gilt ein **Kantenzug**, der e_0 und e_s **verbindet** und s seine **Länge**.



Geschlossener Kantenzug

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (e_0, e_1, \dots, e_s)$ ein Kantenzug.
 A heißt **geschlossen** : $\Leftrightarrow e_s = e_0$.



Weg

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2 \dots, k_s)$ ein Kantenzug.
A heißt **Weg** $:\Leftrightarrow \forall_{i,j \in 1, \dots, s} : i \neq j \Rightarrow k_i \neq k_j$.

Salopp

Ein Kantenzug, bei dem man keine Kante mehrfach abläuft, ist ein Weg.

Achtung: Knoten dürfen mehrfach abgelaufen werden!

Weg

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2 \dots, k_s)$ ein Kantenzug.
A heißt **Weg** $:\Leftrightarrow \forall_{i,j \in 1, \dots, s} : i \neq j \Rightarrow k_i \neq k_j$.

Salopp

Ein Kantenzug, bei dem man keine Kante mehrfach abläuft, ist ein Weg.

Achtung: Knoten dürfen mehrfach abgelaufen werden!

Weg

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2 \dots, k_s)$ ein Kantenzug.
A heißt **Weg** $:\Leftrightarrow \forall_{i,j \in 1, \dots, s} : i \neq j \Rightarrow k_i \neq k_j$.

Salopp

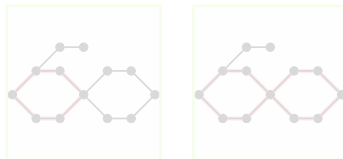
Ein Kantenzug, bei dem man keine Kante mehrfach abläuft, ist ein Weg.

Achtung: Knoten dürfen mehrfach abgelaufen werden!

Kreis

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2, \dots, k_s)$ ein Kantenzug.
 A heißt **Kreis** $:\Leftrightarrow A$ ist geschlossen und ein Weg.

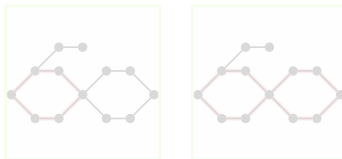
Manchmal wird das auch „einfacher Kreis“ genannt.



Kreis

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2 \dots, k_s)$ ein Kantenzug.
 A heißt **Kreis** $:\Leftrightarrow A$ ist geschlossen und ein Weg.

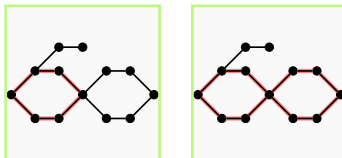
Manchmal wird das auch „einfacher Kreis“ genannt.



Kreis

Sei $G = (E, K)$ ein Graph und $A = (k_1, k_2, \dots, k_s)$ ein Kantenzug.
 A heißt **Kreis** $:\Leftrightarrow A$ ist geschlossen und ein Weg.

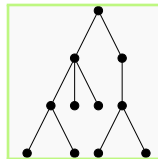
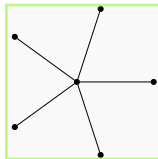
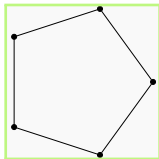
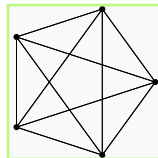
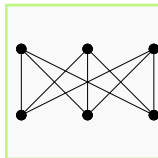
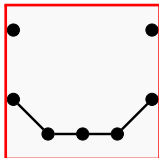
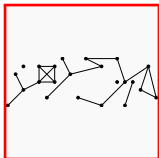
Manchmal wird das auch „einfacher Kreis“ genannt.



Zusammenhängender Graph

Sei $G = (E, K)$ ein Graph.

G heißt **zusammenhängend** $:\Leftrightarrow \forall e_1, e_2 \in E$: Es ex. ein Kantenzug, der e_1 und e_2 verbindet

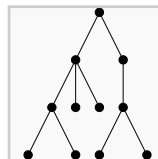
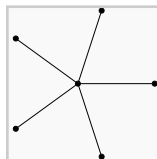
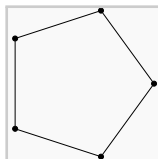
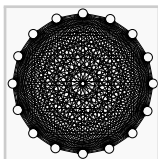
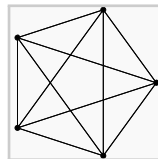
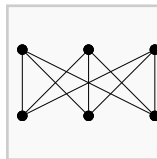
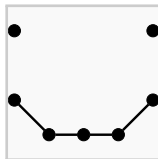
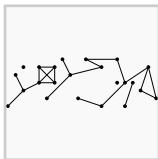


Grad einer Ecke

Der **Grad** einer Ecke ist die Anzahl der Kanten, die von dieser Ecke ausgehen.

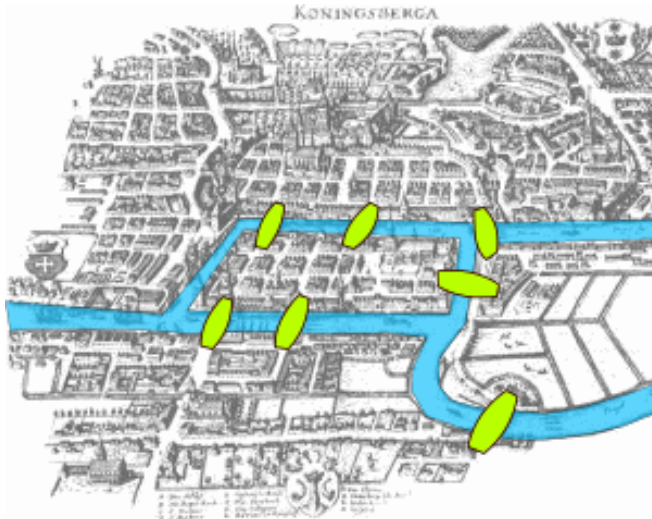
Isolierte Ecke

Hat eine Ecke den Grad 0, so nennt man ihn **isoliert**.

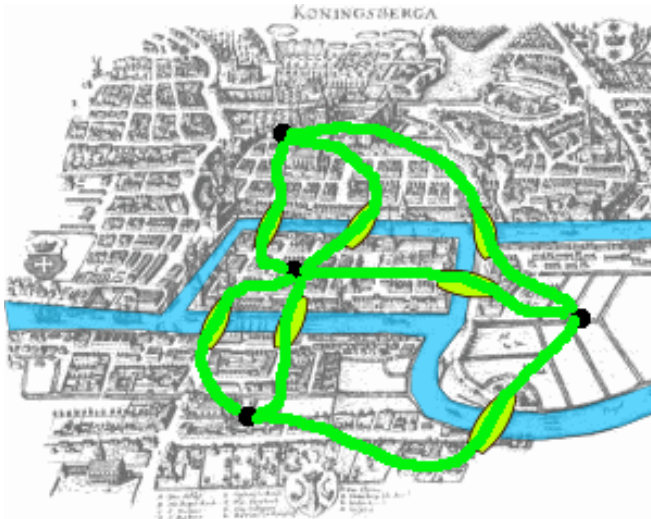




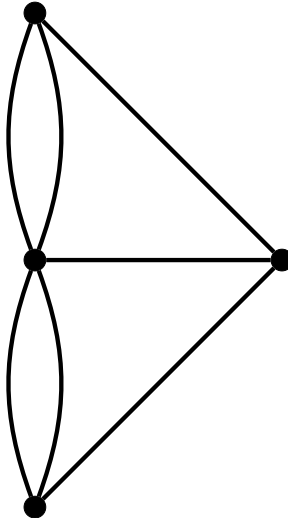
Königsberger Brückenproblem



Übersetzung in einen Graphen



Übersetzung in einen Graphen



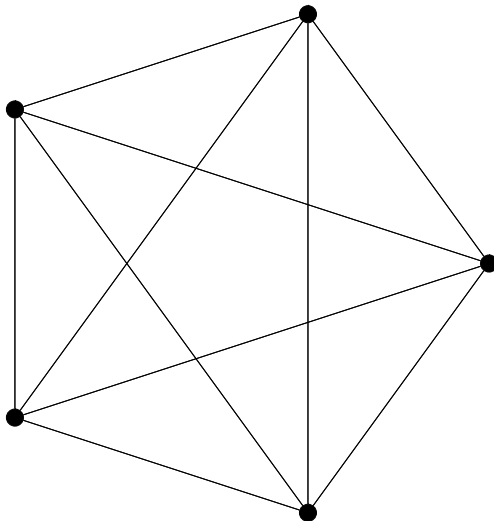
Eulerscher Kreis

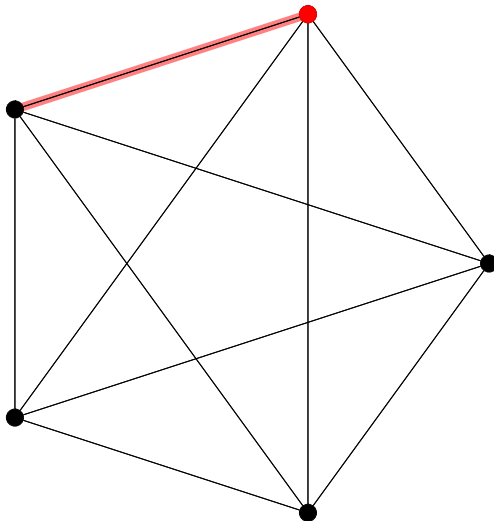
Sei G ein Graph und A ein Kreis in G .

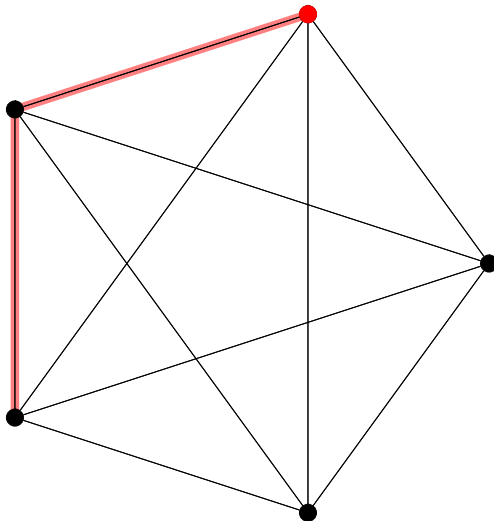
A heißt **eulerscher Kreis** $:\Leftrightarrow \forall e \in E : e \in A$.

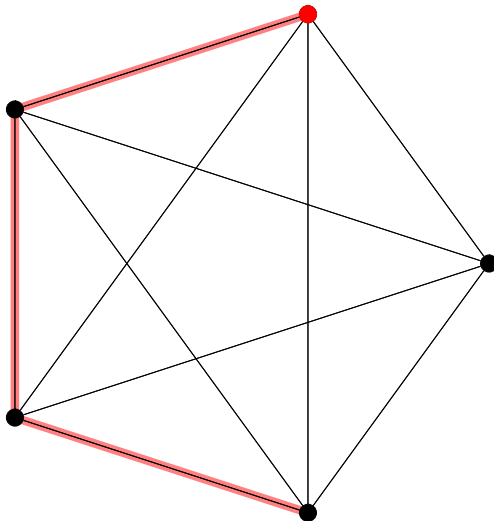
Eulerscher Graph

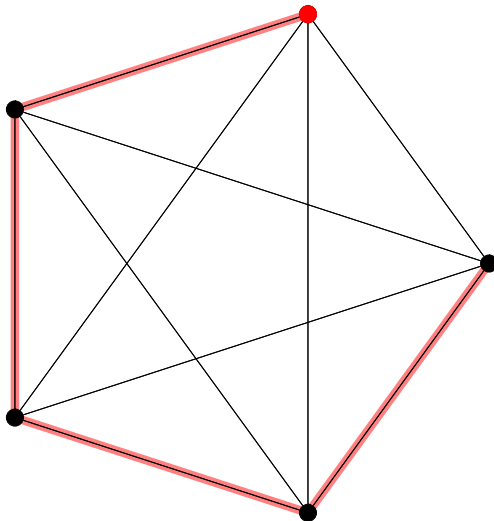
Ein Graph heißt **eulersch**, wenn er einen eulerschen Kreis enthält.

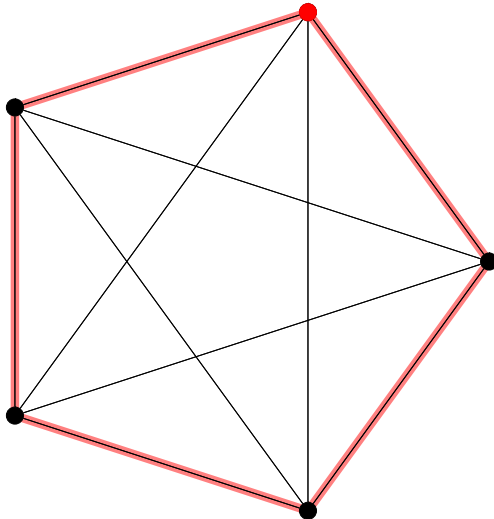


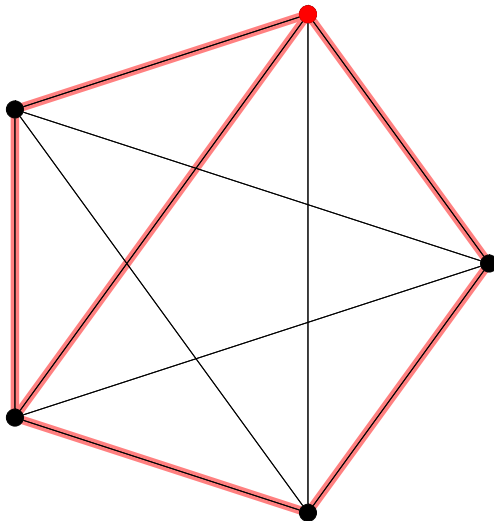


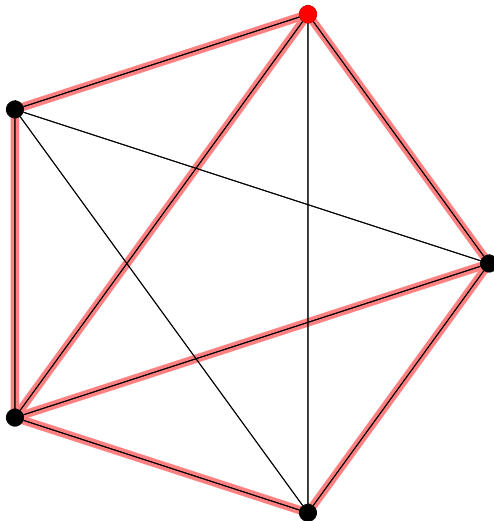


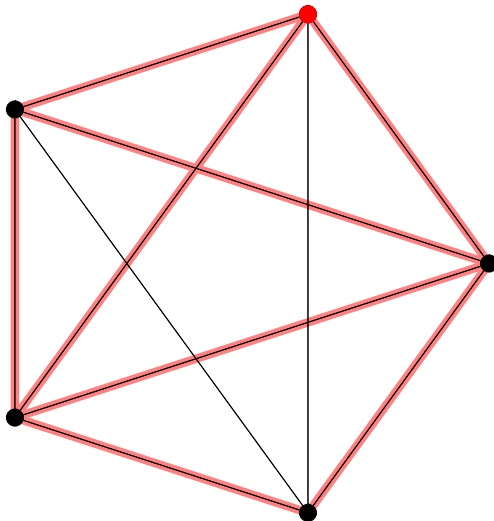


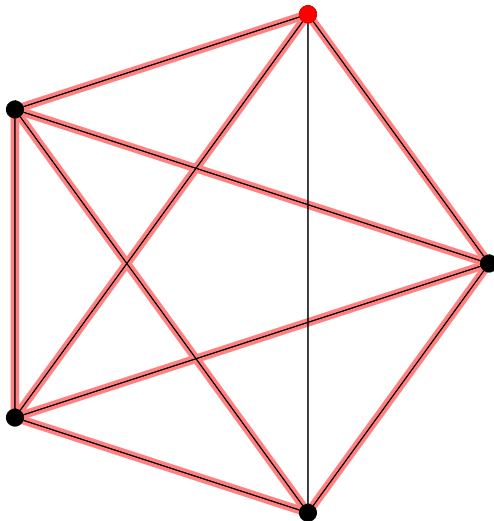


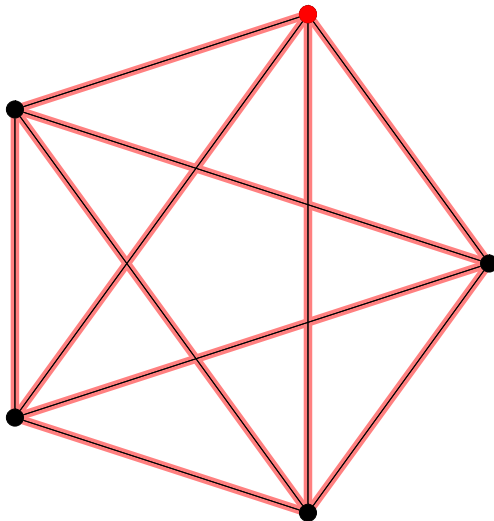








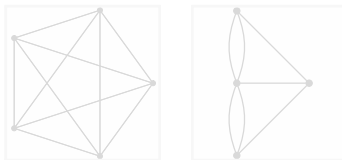




Satz von Euler

Wenn ein Graph G eulersch ist, dann hat jede Ecke von G geraden Grad.

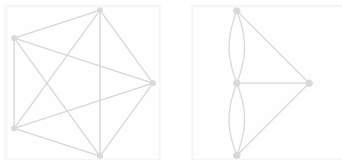
⇒ Wenn G eine Ecke mit ungeraden Grad hat, ist G nicht eulersch.



Satz von Euler

Wenn ein Graph G eulersch ist, dann hat jede Ecke von G geraden Grad.

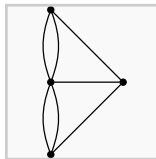
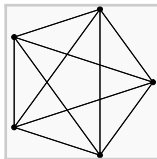
⇒ Wenn G eine Ecke mit ungeraden Grad hat, ist G nicht eulersch.



Satz von Euler

Wenn ein Graph G eulersch ist, dann hat jede Ecke von G geraden Grad.

⇒ Wenn G eine Ecke mit ungeraden Grad hat, ist G nicht eulersch.



Beh.: G ist eulersch $\Rightarrow \forall e \in E : \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

Bew.: Eulerkreis geht durch jede Ecke $e \in E$,
also geht der Eulerkreis (eventuell mehrfach) in e hinein und hinaus
 $\Rightarrow \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

Beh.: G ist eulersch $\Rightarrow \forall e \in E : \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

Bew.: Eulerkreis geht durch jede Ecke $e \in E$,

also geht der Eulerkreis (eventuell mehrfach) in e hinein und hinaus

$\Rightarrow \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

Beh.: G ist eulersch $\Rightarrow \forall e \in E : \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

Bew.: Eulerkreis geht durch jede Ecke $e \in E$,
also geht der Eulerkreis (eventuell mehrfach) in e hinein und hinaus
 $\Rightarrow \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

Beh.: G ist eulersch $\Rightarrow \forall e \in E : \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

Bew.: Eulerkreis geht durch jede Ecke $e \in E$,
also geht der Eulerkreis (eventuell mehrfach) in e hinein und hinaus
 $\Rightarrow \text{Grad}(e) \equiv 0 \pmod{2}$

Umkehrung des Satzes von Euler

Wenn in einem zusammenhängenden Graphen G jede Ecke geraden Grad hat, dann ist G eulersch.

Beweis per Induktion

TODO

Offene eulersche Linie

Sei G ein Graph und A ein Weg, der kein Kreis ist.

A heißt **offene eulersche Linie** von G : \Leftrightarrow Jede Kante in G kommt genau ein mal in A vor.

Ein Graph kann genau dann „in einem Zug“ gezeichnet werden, wenn er eine offene eulersche Linie besitzt.

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „ \Rightarrow “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*

Satz von Euler
 \Rightarrow In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

\Rightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad ■

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „ \Rightarrow “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*

Satz von Euler
 \Rightarrow In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

\Rightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad ■

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „ \Rightarrow “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*

Satz von Euler
 \Rightarrow In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

\Rightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad ■

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „ \Rightarrow “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*

Satz von Euler
 \Rightarrow In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

\Rightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad ■

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „ \Rightarrow “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*

Satz von Euler
 \Rightarrow In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

\Rightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad ■

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

Beweis „ \Rightarrow “

Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*

Satz von Euler
 \Rightarrow In G^* hat jede Ecke geraden Grad

Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

\Rightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad ■

Satz 8.2.3

Sei G ein zusammenhängender Graph.

G hat eine offene eulersche Linie $:\Leftrightarrow G$ hat genau zwei Ecken ungeraden Grades.

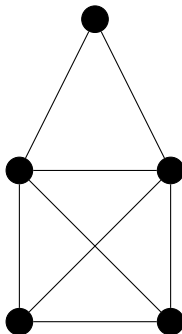
Beweis „ \Rightarrow “

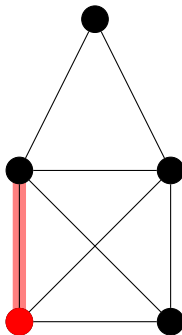
Sei $G = (E, K)$ ein zusammenhängender Graph und $L = (e_0, \dots, e_s)$ eine offene eulersche Linie. Sei $G^* = (E, K \cup \{e_s, e_0\})$. Es gibt einen Eulerkreis in G^*

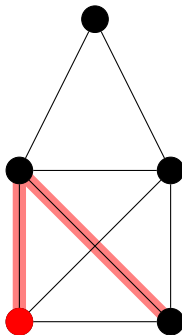
Satz von Euler
 \Rightarrow In G^* hat jede Ecke geraden Grad

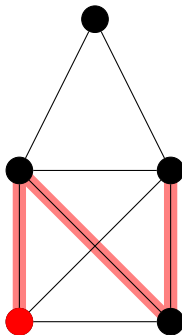
Der Grad von nur zwei Kanten wurde um jeweils 1 erhöht

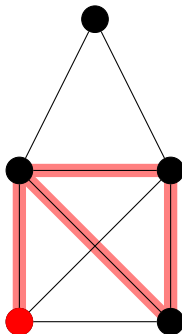
\Rightarrow in G haben genau 2 Ecken ungeraden Grad ■

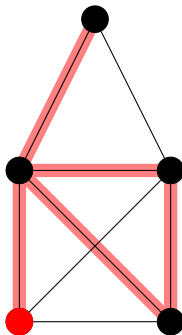


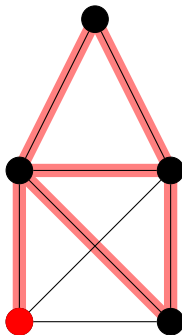


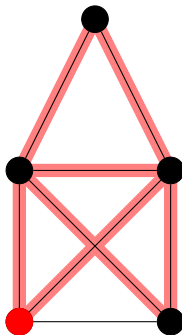


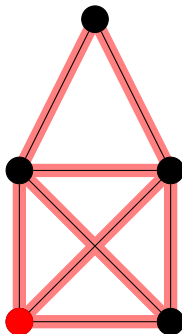












Aufgabe 3

Zeigen Sie: Ein Kreis ist genau dann bipartit, wenn er gerade Länge hat.

- http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Konigsberg_bridges.png
- [Google Maps](#) (Grafiken ©2013 Cnes/Spot Image, DigitalGlobe)

- A. Beutelspacher: *Diskrete Mathematik für Einsteiger*, 4. Auflage, ISBN 978-3-8348-1248-3