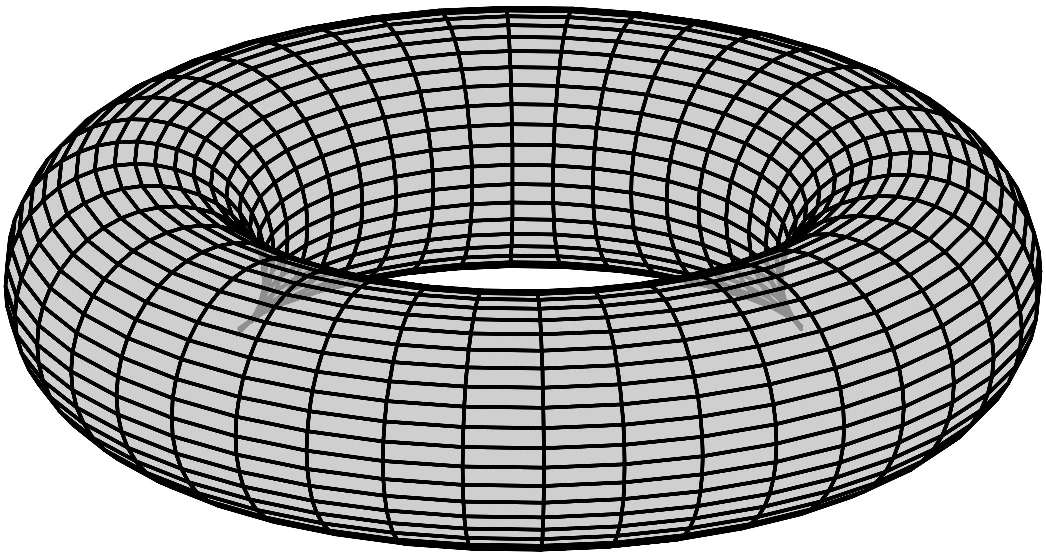
Geometrie und Topologie



Siehe tinyurl.com/GeoTopo

17. November 2013

Vorwort

Dieses Skript wird/wurde im Wintersemester 2013/2014 geschrieben. Es beinhaltet Vorlesungsnotizen von Studenten zur Vorlesung von Prof. Dr. Herrlich.

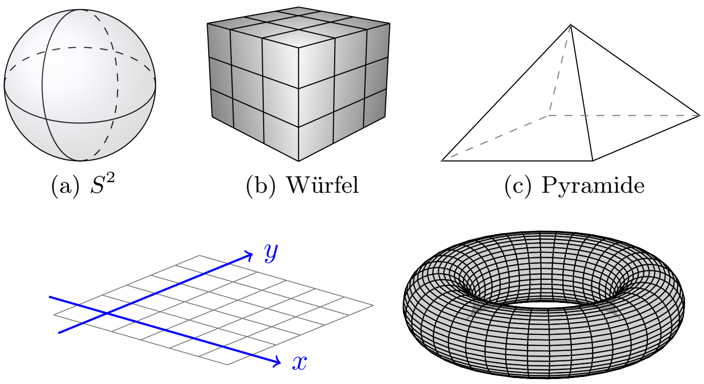
Es darf jeder gerne Verbesserungen einbringen!

Die Kurz-URL des Projekts lautet tinyurl.com/GeoTopo.

An dieser Stelle möchte ich noch Herrn Prof. Dr. Herrlich für einige Korrekturvorschläge und einen gut strukturierten Tafelanschrieb danken, der als Vorlage für dieses Skript diente. Vielen Dank auch an Frau Lenz, die es mir erlaubt hat, ihre Übungsaufgaben und Lösungen zu benutzen.

Was ist Topologie?

Die Kugeloberfläche S^2 lässt sich durch strecken, stauchen und umformen zur Würfeloberfläche oder der Oberfläche einer Pyramide verformen, aber nicht zum $\mathbb{R}^2$ oder zu einem Torus T^2. Für den $\mathbb{R}^2$ müsste man die Oberfläche unendlich ausdehnen und für einen Torus müsste man ein Loch machen.



(a) S^2 (b) Würfel (c) Pyramide

(d) $\mathbb{R}^2$ (e) T^2

Abbildung 0.1: Beispiele für verschiedene Formen

Inhaltsverzeichnis

1 Topologische Grundbegriffe **2**

1.1 Topologische Räume . . . 2
1.2 Metrische Räume . . . 5
1.3 Stetigkeit . . . 8
1.4 Zusammenhang . . . 10
1.5 Kompaktheit . . . 12
1.6 Wege und Knoten . . . 16
Übungsaufgaben . . . 20

2 Mannigfaltigkeiten und Simpizidkomplexe **21**

2.1 Topologische Mannigfaltigkeiten . . . 21
Übungsaufgaben . . . 26

Lösungen der Übungsaufgaben **27**

Symbolverzeichnis **29**

Stichwortverzeichnis **30**

1 Topologische Grundbegriffe

1.1 Topologische Räume

Definition 1

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar $(X, \mathfrak{T})$ bestehend aus einer Menge X und $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften

(i) $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$

(ii) Sind $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}$, so ist $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{T}$

(iii) Ist I eine Menge und $U_i \in \mathfrak{T}$ für jedes $i \in I$, so ist $\bigcup\limits_{i \in I} U_i \in \mathfrak{T}$

Die Elemente von $\mathfrak{T}$ heißen **offene Teilmengen** von X.

$A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Es gibt auch Mengen, die weder abgeschlossen, noch offen sind wie z. B. $[0, 1)$. Auch gibt es Mengen, die sowohl abgeschlossen als auch offen sind.

Korollar 1.1 (Mengen, die offen und abgeschlossen sind, existieren)

Betrachte $\emptyset$ und X mit der „trivialen Topologie“ $\mathfrak{T}_{\text{triv}} = \{ \emptyset, X \}$.

Es gilt: $X \in \mathfrak{T}$ und $\emptyset \in \mathfrak{T}$, d. h. X und $\emptyset$ sind offen. Außerdem $X^C = X \setminus X = \emptyset \in \mathfrak{T}$ und $X \setminus \emptyset = X \in \mathfrak{T}$, d. h. X und $\emptyset$ sind als Komplement offener Mengen abgeschlossen. ■

Beispiel 1

1) $X = \mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik.

$$U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ offen} \Leftrightarrow \text{für jedes } x \in U \text{ gibt es } r > 0, \text{ sodass } \mathfrak{B}_r(x) = \{ y \in \mathbb{R}^n \mid d(x, y) < r \} \subseteq U$$

Also: $\mathfrak{T} = \{ M \subseteq X \mid M \text{ ist offene Kugel} \}$

2) Allgemeiner: (X, d) metrischer Raum

3) X Menge, $\mathfrak{T} = \mathcal{P}(X)$ heißt „diskrete Topologie“

4) $X := \mathbb{R}, \mathfrak{T}_Z := \{ U \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus U \text{ endlich} \} \cup \{ \emptyset \}$ heißt „Zariski-Topologie“
Beobachtungen:
   - $U \in \mathfrak{T}_Z \Leftrightarrow \exists f \in \mathbb{R}[X]$, sodass $\mathbb{R} \setminus U = V(f) = \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0 \}$
   - Es gibt keine disjunkten offenen Mengen in $\mathfrak{T}_Z$

5) $X := \mathbb{R}^n, \mathfrak{T}_Z = \{U \subseteq \mathbb{R}^n | \text{Es gibt Polynome } f_1, \ldots, f_r \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n] \text{ sodass } \mathbb{R}^n \setminus U = V(f_1, \ldots, f_r)\}$

6) $X := \{ 0, 1 \}, \mathfrak{T} = \{ \emptyset, \{ 0, 1 \}, \{ 0 \} \}$ heißt „Sierpińskiraum“.
$\emptyset, \{ 0, 1 \}, \{ 1 \}$ sind dort alle abgeschlossenen Mengen.

Definition 2
Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, $x \in X$.

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **Umgebung** von x, wenn es ein $U_0 \in \mathfrak{T}$ gibt mit $x \in U_0$ und $U_0 \subseteq U$.

Definition 3
Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, $M \subseteq X$ eine Teilmenge.

a) $M^\circ := \{ x \in M \mid M \text{ ist Umgebung von } x \} = \bigcup\limits_{\substack{U \subseteq M \\ U \in \mathfrak{T}}} U$ heißt **Inneres** oder **offener Kern** von M.

b) $\overline{M} := \bigcap\limits_{\substack{M \subseteq A \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$ heißt **abgeschlossene Hülle** oder **Abschluss** von M.

c) $\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$ heißt **Rand** von M.

d) M heißt **dicht** in X, wenn $\overline{M} = X$ ist.

Beispiel 2

1) $X = \mathbb{R}$ mit euklidischer Topologie
$M = \mathbb{Q} \Rightarrow \overline{M} = \mathbb{R}, \quad M^\circ = \emptyset$

2) $X = \mathbb{R}$, $M = (a, b) \Rightarrow \overline{M} = [a, b]$

3) $X = \mathbb{R}, \mathfrak{T} = \mathfrak{T}_Z$
$M = (a, b) \Rightarrow \overline{M} = \mathbb{R}$

Definition 4
Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum.

a) $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$ heißt **Basis** der Topologie $\mathfrak{T}$, wenn jedes $U \in \mathfrak{T}$ Vereinigung von Elementen aus $\mathfrak{B}$ ist.

b) $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$ heißt **Subbasis**, wenn jedes $U \in \mathfrak{T}$ Vereinigung von endlich vielen Durchschnitten von Elementen aus $\mathfrak{B}$ ist.

Beispiel 3
Gegeben sei $X = \mathbb{R}^n$ mit euklidischer Topologie $\mathfrak{T}$. Dann ist

$$\mathfrak{B} = \{ B_r(x) \mid r \in \mathbb{Q}_{>0}, x \in \mathbb{Q}^n \}$$

ist eine abzählbare Basis von $\mathfrak{T}$.

Bemerkung 1
Sei X eine Menge und $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann gibt es genau eine Topologie $\mathfrak{T}$ auf X, für die $\mathfrak{B}$ Subbasis ist.

Definition 5
Sei $(X, \mathfrak{T})$ ein topologischer Raum, $Y \subseteq X$.
$\mathfrak{T}_Y := \{ U \cap Y \mid U \in \mathfrak{T} \}$ ist eine Topologie auf Y.

$\mathfrak{T}_Y$ heißt **Spurtopologie** und $(Y, \mathfrak{T}_Y)$ heißt ein **Teilraum** von $(X, \mathfrak{T})$

Definition 6

Seien X_1, X_2 topologische Räume.
$U \subseteq X_1 \times X_2$ sei offen, wenn es zu jedem $x = (x_1, x_2) \in U$ Umgebungen U_i um x_i mit $i = 1, 2$ gibt, sodass $U_1 \times U_2 \subseteq U$ gilt.

$\mathfrak{T} = \{\, U \subseteq X_1 \times X_2 \mid U \text{ offen} \,\}$ ist eine Topologie auf $X_1 \times X_2$. Sie heißt **Produkttopologie**.
$\mathfrak{B} = \{\, U_1 \times U_2 \mid U_i \text{ offen in } X_i, i = 1, 2 \,\}$ ist eine Basis von $\mathfrak{T}$.

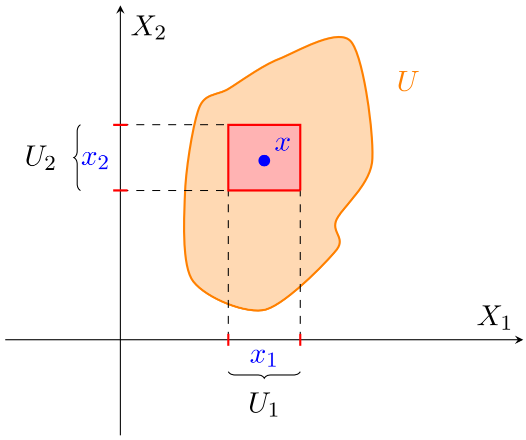


Abbildung 1.1: Zu $x = (x_1, x_2)$ gibt es Umgebungen U_1, U_2 mit $U_1 \times U_2 \subseteq U$

Beispiel 4

1) $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ mit euklidischer Topologie.
$\Rightarrow$ Die Produkttopologie auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ stimmt mit der euklidischen Topologie auf $\mathbb{R}^2$ überein.

2) $X_1 = X_2 = \mathbb{R}$ mit Zariski-Topologie. $\mathfrak{T}$ Produkttopologie auf $\mathbb{R}^2$: $U_1 \times U_2$
(Siehe Abb. 1.2)

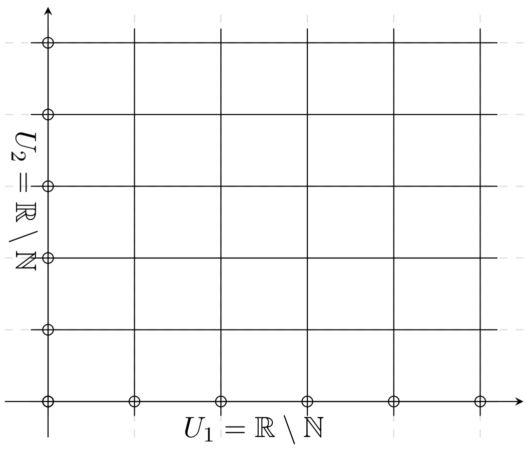


Abbildung 1.2: Zariski-Topologie auf $\mathbb{R}^2$

Definition 7

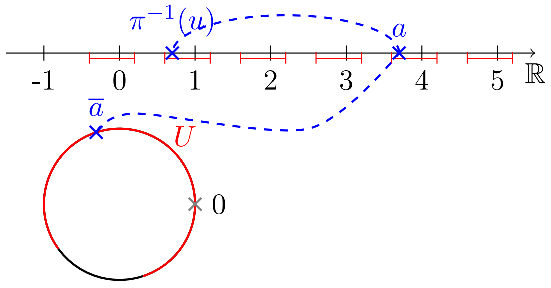
Sei X topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, $\overline{X} = X/_\sim$ sei die Menge der Äquivalenzklassen, $\pi : x \to \overline{x}, \quad x \mapsto [x]_\sim$.

$$\mathfrak{T}_{\overline{X}} := \left\{\, U \subseteq \overline{X} \;\middle|\; \pi^{-1}(U) \in \mathfrak{T}_X \,\right\}$$

$(\overline{X}, \mathfrak{T}_{\overline{X}})$ heißt **Quotiententopologie**.

Beispiel 5

$X = \mathbb{R}, a \sim b :\Leftrightarrow a - b \in \mathbb{Z}$



$0 \sim 1$, d. h. $[0] = [1]$

Beispiel 6

$$X = \mathbb{R}^2, (x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 - x_2 \in \mathbb{Z} \\ y_1 - y_2 \in \mathbb{Z}$$

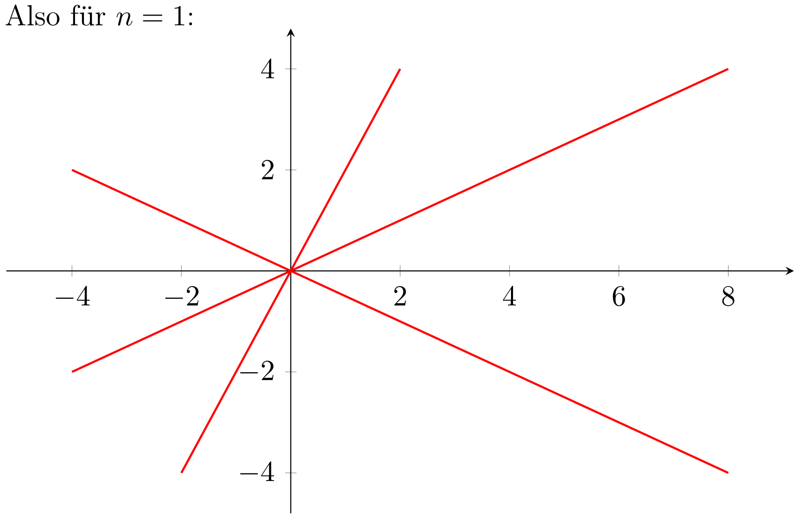
$X/_\sim$ ist ein Torus.

Beispiel 7

$$X = \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{\, 0 \,\}, x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^\times \text{ mit } y = \lambda x \\ \Leftrightarrow x \text{ und } y \text{ liegen auf der gleichen Ursprungsgerade}$$

$$\overline{X} = \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$

Also für $n = 1$:



1.2 Metrische Räume

Definition 8

Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbb{R}_0^+$ heißt **Metrik**, wenn gilt:

(i) Definitheit: $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

(ii) Symmetrie: $d(x,y) = d(y,x)$

(iii) Dreiecksungleichung: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(x+z)$

Das Paar (X,d) heißt ein **metrischer Raum**.

Bemerkung 2
Sei (X,d) ein metrischer Raum und

$$\mathfrak{B}_r(x) := \{\, y \in X \mid d(x,y) < r \,\} \text{ für } x \in X, r \in \mathbb{R}^+$$

$\mathfrak{B}$ ist Basis einer Topologie auf X.

Beispiel 8
Sei V ein euklidischer oder hermiteischer Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Dann wird V durch $d(x,y) := \sqrt{\langle x-y, x-y \rangle}$ zum metrischen Raum.

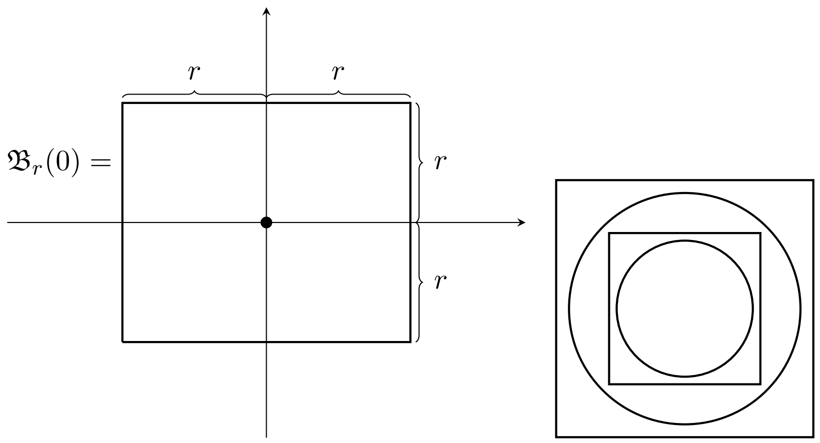
Beispiel 9 (diskrete Metrik)
Sei X eine Menge. Dann heißt

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y \end{cases}$$

die **diskrete Metrik**. Die Metrik d induziert die **diskrete Topologie**.

Beispiel 10
$X = \mathbb{R}^2$ und $d\left((x_1,y_1),(x_2,y_2)\right) := \max(\|x_1 - x_2\|, \|y_1 - y_2\|)$ ist Metrik.

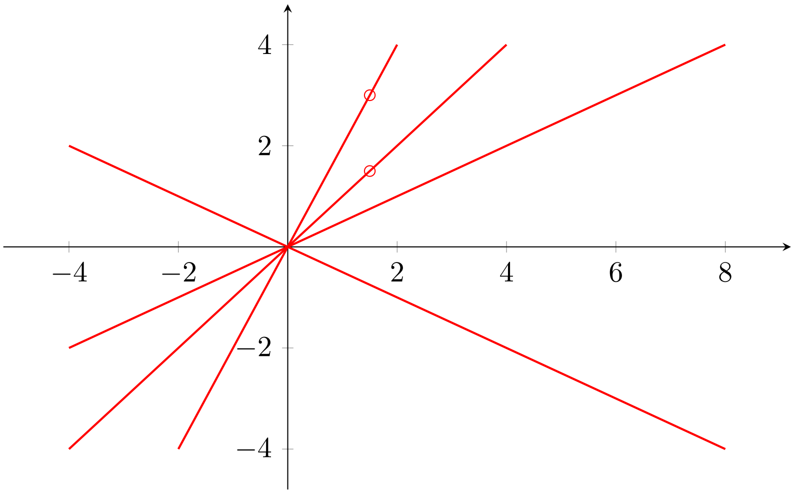
Beobachtung: d erzeugt die euklidische Topologie.



(a) $\mathfrak{B}_r(0)$ (b) Euklidische Topologie

Abbildung 1.3: Veranschaulichungen zur Metrik d

Beispiel 11 (SNCF-Metrik[1])
$X = \mathbb{R}^2$



Definition 9

Ein topologischer Raum X heißt **hausdorffsch**, wenn es für je zwei Punkte $x \neq y$ in X Umgebungen U_x um x und U_y um y gibt, sodass $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Bemerkung 3 (Trennungseigenschaft)

Metrische Räume sind hausdorffsch, da

$$d(x, y) > 0 \Rightarrow \exists \varepsilon : \mathfrak{B}_\varepsilon(x) \cap \mathfrak{B}_\varepsilon(y) = \emptyset$$

Ein Beispiel für einen topologischen Raum, der nicht hausdorfsch ist, ist $(\mathbb{R}, \mathfrak{T}_Z)$.

Bemerkung 4

Seien X, X_1, X_2 Hausdorff-Räume.

a) Jeder Teilraum um X ist Hausdorffsch.

b) $X_1 \times X_2$ ist Hausdorffsch.

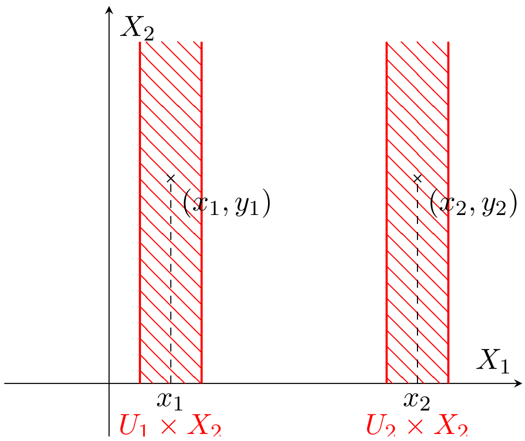


Abbildung 1.4: Wenn X_1, X_2 hausdorffsch sind, dann auch $X_1 \times X_2$

Definition 10

Sei X ein topologischer Raum und $(x)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in X. $x \in X$ heißt **Grenzwert** oder **Limes** von (x_n), wenn es für jede Umgebung U von x ein n_0 gibt, sodass $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$.

Korollar 1.2

Ist X hausdorffsch, so hat jede Folge in X höchstens einen Grenzwert.

Beweis: <u>Annahme</u>: x und y mit $x \neq y$ sind Grenzwerte der Folge (x_n).

Nach Voraussetzung gibt es Umgebungen U_x von x und U_y von y mit $U_x \cap U_y = \emptyset$. Nach Annahme gibt es n_0 mit $x_n \in U_x \cap U_y$ für alle $n \geq n_0 \Rightarrow$ Widerspruch ■

1.3 Stetigkeit

Definition 11

Seien X, Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

a) f heißt **stetig**, wenn für jedes offene $U \subseteq Y$ auch $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen ist.

b) f heißt **Homöomorphismus**, wenn es eine stetige Abbildung $g : Y \to X$ gibt, sodass $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Korollar 1.3

Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

Dann gilt: f ist stetig $\Leftrightarrow$ zu jedem $x \in X$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta(x, \varepsilon) > 0$, sodass für alle $y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$ gilt $d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Beweis: „$\Rightarrow$": Sei $x \in X, \varepsilon > 0$ gegeben und $U := \mathfrak{B}_\varepsilon(f(x))$.
Dann ist U offen in Y.
$\xRightarrow{11.a} f^{-1}(U)$ ist offen in X. Dann ist $x \in f^{-1}(U)$.
$\Rightarrow \exists \delta > 0$, sodass $\mathfrak{B}_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U)$
$\Rightarrow f(\mathfrak{B}_\delta(x)) \subseteq U$
$\Rightarrow \{\, y \in X \mid d_X(x, y) < \delta \,\} \Rightarrow$ Beh.

„$\Leftarrow$": Sei $U \subseteq Y$ offen, $X \in f^{-1}(U)$.
Dann gibt es $\varepsilon > 0$, sodass $\mathfrak{B}_\varepsilon(f(x)) \subseteq U$
$\xRightarrow{\text{Vor.}}$ Es gibt $\delta > 0$, sodass $f(\mathfrak{B}_\delta(x)) \subseteq \mathfrak{B}_\varepsilon(f(x))$
$\Rightarrow \mathfrak{B}_\delta(x) \subseteq f^{-1}(\mathfrak{B}_\varepsilon(f(x))) \subseteq f^{-1}(U)$ ■

Bemerkung 5

Eine Ableitung $f : X \to Y$ von topologischen Räumen ist genau dann stetig, wenn für jede abgeschlossene Teilmenge $A \subseteq Y$ gilt: $f^{-1}(A) \subseteq X$ ist abgeschlossen.

Beispiel 12

1) Für jeden topologischen Raum X gilt: $\mathrm{Id}_X : X \to X$ ist Homöomorphismus.

2) Ist Y trivialer topologischer Raum, d.h. $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_{\text{triv}}$, so ist jede Abbildung $f : X \to Y$ stetig.

3) Ist X diskreter topologischer Raum, so ist $f : X \to Y$ stetig für jeden topologischen Raum Y und jede Abbildung f.

4) Sei $X = [0, 1), Y = S^1 = \{\, z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1 \,\}$ und $f(t) = e^{2\pi i t}$ Die Umkehrabbildung g ist nicht stetig, da $g^{-1}(U)$ nicht offen ist (vgl. Abb. 1.5)

Korollar 1.4

Seien X, Y, Z topologische Räume, $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetige Abbildungen.

Dann ist $g \circ f : X \to Z$ stetig.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

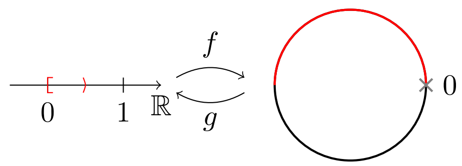


Abbildung 1.5: Beispiel einer stetigen Funktion f, deren Umkehrabbildung g nicht steitg ist.

Beweis: Sei $U \subseteq Z$ offen $\Rightarrow (g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$. $g^{-1}(U)$ ist offen in Y weil g stetig ist, $f^{-1}(g^{-1}(U))$ ist offen in X, weil f stetig ist. ■

Bemerkung 6

a) Für jeden topologischen Raum ist $\text{Homöo}(X) := \{ f : X \to X \mid f \text{ ist Homöomorphismus} \}$ eine Gruppe.

b) Jede Isometrie $f : X \to Y$ zwischen metrischen Räumen ist ein Homöomorphismus.

c) $\text{Isom}(X) := \{ f : X \to X \mid f \text{ ist Isometrie} \}$ ist Untergruppe von $\text{Homöo}(X)$ für jeden metrischen Raum X.

Korollar 1.5

Seien X, Y topologische Räume. $\pi_X : X \times Y \to X$ und $\pi_Y : X \times Y \to Y$ die Projektionen

$$(x, y) \mapsto x \quad (x, y) \mapsto y$$

Wird $X \times Y$ mit der Produkttopologie versehen, so sind π_X und π_Y stetig.

Beweis: Sei $U \subseteq X$ offen $\Rightarrow \pi_x^{-1}(U) = U \times Y$ ist offen in $X \times Y$. ■

Korollar 1.6

Sei X ein topologischer Raum, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X, $\overline{X} = X/_\sim$ der Bahnenraum versehen mit der Quotiententopologie, $\pi : X \to \overline{X}$, $x \mapsto [x]_\sim$.

Dann ist π stetig.

Beweis: Nach Definition ist $U \subseteq \overline{X}$ offen $\Leftrightarrow \pi^{-1}(U) \subseteq X$ offen. ■

Beobachtung: Die Quotiententopologie ist die feinste Topologie, sodass π stetig wird.

Beispiel 13 (Stereographische Projektion)

$\mathbb{R}^n$ und $S^n \setminus \{ N \}$ sind homöomorph für beliebiges $N \in S^n$

$$\begin{aligned} S^n &= \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1 \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 \right\} \end{aligned}$$

Œ sei $N = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} f : &S^n \setminus \{ N \} \to \mathbb{R}^n \\ P \mapsto &\overbrace{L_P \cap H}^{\text{genau ein Punkt}} \end{aligned}$$

wobei $\mathbb{R}^n = H = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; x_{n+1} = 0 \right\}$ und L_P die Gerade in $\mathbb{R}^{n+1}$ durch N und P ist.

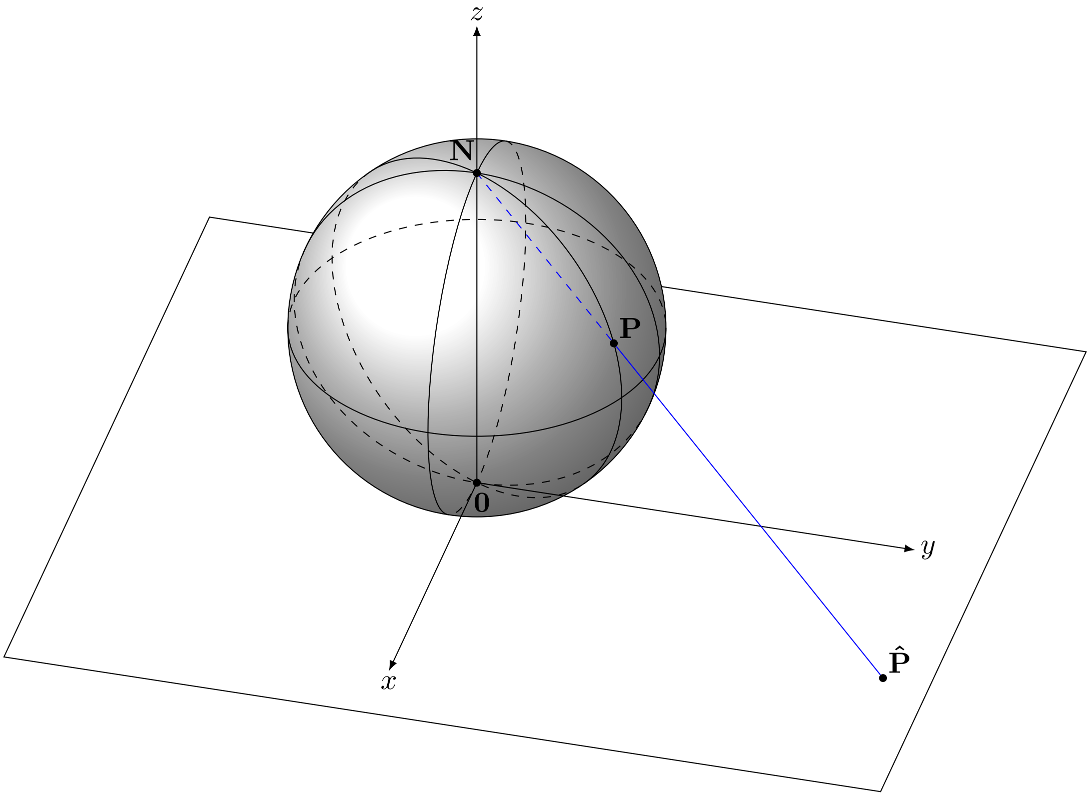


Abbildung 1.6: Visualisierung der sphärischen Projektion
Bildquelle: texample.net/tikz/examples/map-projections

Sei $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n+1} \end{pmatrix}$, so ist $x_{n+1} < 1$, also ist L_P nicht parallel zu H. Also schneiden sich L_P und H in genau einem Punkt $\hat{P}$.

Es gilt: f ist bijektiv und die Umkehrabbildung ist ebenfalls stetig.

1.4 Zusammenhang

Definition 12
Ein Raum X heißt **zusammenhängend**, wenn es keine offenen nichtleeren Teilmengen U_1, U_2 von X gibt mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $U_1 \cup U_2 = X$.

Bemerkung 7
X ist zusammenhängend $\Leftrightarrow$ Es gibt keine nichtleeren abgeschlossenen Teilmengen A_1, A_2 mit $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ und $A_1 \cup A_2 = X$.

Bemerkung 8
Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt zusammenhängend, wenn Y als topologischer Raum mit der Teilraumtopologie zusammenhängend ist.

Beispiel 14 (Zusammenhang von Räumen)

1. $\mathbb{R}^n$ ist mit der euklidischen Topologie zusammenhängend, denn:

   Angenommen, $\mathbb{R}^n = U_1 \cup U_2$ mit U_i offen, $U_i \neq \emptyset$ und $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ existiert.

   Sei $x \in U_1, y \in U_2$ und $[x, y]$ die Strecke zwischen x und y. Dann ist $U_1 \cap [x, y]$ die Vereinigung von offenen Intervallen. Dann gibt es $z \in [x, y]$ mit $z \in \partial(U_1 \cap [x, y])$, aber $z \notin U_1 \Rightarrow z \in U_2$. In jeder Umgebung von z liegt ein Punkt von $U_1 \Rightarrow$ Widerspruch zu U_2 offen.

2. $\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}$ ist nicht zusammenhängend, denn $\mathbb{R} \setminus \{ 0 \} = \mathbb{R}_{<0} \cup \mathbb{R}_{>0}$

3. $\mathbb{R}^2 \setminus \{ 0 \}$ ist zusammenhängend.

4. $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$ ist nicht zusammenhängend, da

$$(\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_{<\sqrt{2}}) \cup (\mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_{>\sqrt{2}}) = \mathbb{Q}$$

5. $\{ x \}$ ist zusammenhängedn für jedes $x \in X$, wobei X ein topologischer Raum ist.

6. $\mathbb{R}$ mit Zariski-Topologie ist zusammenhängend

Korollar 1.7

Sei X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$ zusammenhängend. Dann ist auch $\overline{A}$ zusammenhängend.

Beweis: Angenommen $\overline{A} = A_1 \cup A_2, A_i$ abgeschlossen, $\neq \emptyset$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$

$$\Rightarrow A = \underbrace{\underbrace{(A \cap A_1)}_{\text{abgeschlossen}} \cup \underbrace{(A \cap A_2)}_{\text{abgeschlossen}}}_{\text{disjunkt}}$$

Wäre $A \cap A_1 = \emptyset$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow A \subseteq A_2 \\ &\Rightarrow \overline{A} \subseteq A_2 \\ &\Rightarrow A_1 = \emptyset \qquad\qquad \Rightarrow \text{Widerspruch} \end{aligned}$$

■

Korollar 1.8

Sei X topologischer Raum, $A, B \subseteq X$ zusammenhängend.

Ist $A \cap B \neq \emptyset$, dann ist $A \cup B$ zusammenhängend.

Beweis: Sei $A \cup B = U_1 \cup U_2, U_i \neq \emptyset$ offen, disjunkt

$$\begin{aligned} &\overset{\text{Œ}}{\Rightarrow} A = (A \cap U_1) \cup (A \cap U_2) \text{ offen, disjunkt} \\ &\xRightarrow{A \text{ zhgd.}} A \cap U_1 = \emptyset \\ &\xRightarrow{A\cap B\neq\emptyset} U_1 \subseteq B \\ B = &\underbrace{(B \cap U_1)}_{=U_1} \cup \underbrace{(B \cap U_2)}_{=\emptyset} \text{ ist unerlaubte Zerlegung} \end{aligned}$$

■

Definition 13
Sei X ein topologischer Raum.

Für $x \in X$ sei
$$Z(x) := \bigcup_{\substack{A \subseteq X \text{zhgd.} \\ X \in A}} A$$

$Z(x)$ heißt **Zusammenhangskomponente**.

Korollar 1.9
Sei X ein topologischer Raum. Dann gilt:

a) $Z(X)$ ist die größte zusammehängede Teilmenge von X, die x enthält.

b) $Z(X)$ ist abgeschlossen.

c) X ist disjunkte Vereinigung von Zusammenhangskomponenten.

Beweis: a) Sei $Z(x) = A_1 \cup A_2$ mit $A_i \neq \emptyset$ abgeschlossen, disjunkt.

Œ sei $x \in A_1$ und $y \in A_2$. y liegt in einer zusammehängenden Teilmenge A, die auch x enthält. $\Rightarrow A = \underbrace{(A \cap A_1)}_{\ni x} \cup \underbrace{(A \cap A_2)}_{\ni y}$ ist unerlaubte Zerlegung.

b) Nach Korollar 1.7 ist $\overline{Z(x)}$ zusammenhängend $\Rightarrow \overline{Z(x)} \subseteq Z(x) \Rightarrow Z(x) = \overline{Z(x}$

c) Ist $Z(y) \cap Z(x) \neq \emptyset \overset{1.8}{\Longrightarrow} Z(y) \cup Z(x)$ ist zusammenhängend.

$$\begin{aligned} \Rightarrow Z(x) \cup Z(y) \subseteq Z(x) &\Rightarrow Z(y) \subseteq Z(x) \\ \subseteq Z(y) &\Rightarrow Z(x) \subseteq Z(y) \end{aligned}$$

■

Korollar 1.10
Sei $f: X \to Y$ stetig. Ist $A \subseteq X$ zusammenhängend, so ist $f(A) \subseteq y$ zusammenhängend.

Beweis: Sei $f(A) = U_1 \cup U_2, U_i \neq \emptyset$, offen, disjunkt.

$\Rightarrow f^{-1}(f(A)) = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2)$

$\Rightarrow A = \underbrace{(A \cap f^{-1}(U_1))}_{\neq \emptyset} \cup \underbrace{(A \cap f^{-1}(U_2))}_{\neq \emptyset}$ ■

1.5 Kompaktheit

Definition 14
Ein topologischer Raum X heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

$$\mathfrak{U} = \{\, U_i \,\}_{i \in I}\,, \quad U_i \text{ offen in } X, \quad \bigcup_{i \in I} U_i = X$$

Definition 15
Sei X eine Menge und $T \subseteq \mathcal{P}(X)$.

T heißt eine **Überdeckung** von X, wenn gilt:

$$\forall x \in X : \exists M \in T : x \in M$$

Korollar 1.11
$I = [0, 1]$ ist kompakt bezüglich der euklidischen Topologie.

Beweis: Sei $(U_i)_{i \in J}$ eine offene Überdeckung von I.

Der Beweis ist komisch. Das würde ich gerne mit jemanden durchsprechen.

z. Z.: Es gibt ein $\delta > 0$, sodass jedes Teilintervall der Länge δ von I in einem der U_i enthalten ist.

Angenommen, es gibt kein solches δ. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein Intervall $I_n \subseteq [0, 1]$ der Länge $1/n$ sodass $I_n \not\subseteq U_i$ für alle $i \in I$.

Sei x_n der Mittelpunkt von I_n. Die Folge (x_n) hat einen Häufungspunkt $x \in [0, 1]$. Dann gibt es $i \in I$ mit $x \in U_i$. Da U_i offen ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U_i$. Dann gibt es n mit $1/n < \varepsilon/2$ und $|x - x_n| < \varepsilon/2$, also $I_n \subseteq (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq U_i$

$\Rightarrow$ Widerspruch

Dann überdecke $[0, 1]$ mit endlich vielen Intervallen $I_1, \dots, I_d$ der Länge δ. Jedes I_j ist in U_{ij} enthalten.

$\Rightarrow U_{j_1}, \dots, U_{j_d}$ ist endliche Teilüberdeckung von U ■

Beispiel 15

1) $\mathbb{R}$ ist nicht kompakt.
2) $(0, 1)$ ist nicht kompakt.
   $U_n = (1/n, 1 - 1/n) \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n = (0, 1)$
3) $\mathbb{R}$ mit der Zariski-Topologie ist kompakt und jede Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist es auch.

Korollar 1.12
Sei X kompakter Raum, $A \subseteq X$ abgeschlossen. Dann ist A kompakt.

Beweis: Sei $(V_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von A.
Dann gibt es für jedes $i \in I$ eine offene Teilmenge $U_i \subseteq X$ mit $V_i = U_i \cap A$.

$$\Rightarrow A \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$$

$$\Rightarrow \mathfrak{U} = \{ U_i \mid i \in I \} \cup \{ X \setminus A \} \text{ ist offene Überdeckung von } X$$

$$\xRightarrow{X \text{ kompakt}} \text{es gibt } i_1, \dots, i_n \in I, \text{ sodass } \bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j} \cup (X \setminus A) = X$$

$$\Rightarrow \left(\bigcup_{j=1}^{n} U_{i_j} \cup (X \setminus A) \right) \cap A = A$$

$$\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{n} \underbrace{(U_{i_j} \cap A)}_{=V_{i_j}} \cup \underbrace{((X \setminus A) \cap A)}_{=\emptyset} = A$$

$$\Rightarrow V_{i_1}, \dots, V_{i_n} \text{ überdecken } A$$

■

Korollar 1.13
Seien X, Y kompakte topologische Räume. Dann ist $X \times Y$ mit der Produkttopologie kompakt.

Beweis: Sei $(W_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von $X \times Y$. Für jedes $(x, y) \in X \times Y$ gibt es offene Teilmengen $U_{x,y}$ von X und $V_{x,y}$ von Y sowie ein $i \in I$, sodass $U_{x,y} \times V_{x,y} \subseteq W_i$.

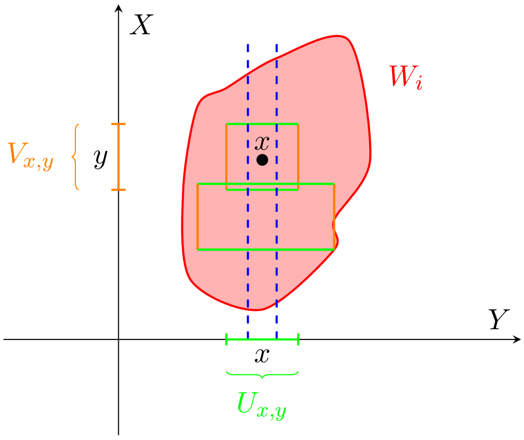


Abbildung 1.7: Die blaue Umgebung ist Schnitt vieler Umgebungen

Die offenen Mengen $U_{x_0,y} \times V_{x_0,y}$ für festes x_0 und alle $y \in Y$ überdecken $\{ x_0 \} \times y$. Da Y kompakt ist, ist auch $\{ x_0 \} \times Y$ kompakt. Also gibt es $y_1, \dots, y_{m(x_0)}$ mit $\bigcup_{i=1}^{m(x_0)} U_{x_0,y_i} \times V_{x_0,y_i} \supseteq \{ x_0 \} \times Y$.

Sei $U_{x_0} := \bigcap_{i=1}^{m(x)} U_{x_0,y_i}$. Da X kompakt ist, gibt es $x_1, \dots, x_n \in X$ mit $\bigcup_{j=1}^{n} U_{x_j} = X$

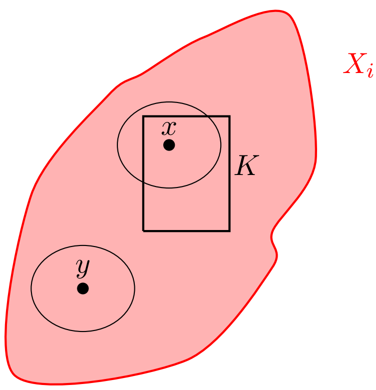
$\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{k} \bigcup_{i=1}^{m(x_j)} \underbrace{(U_{x_j,y_i} \times V_{x_j,y_i})}_{\text{Ein grün-oranges Kästchen}} \supseteq X \times Y$

$\Rightarrow \bigcup_j \bigcup_i W_i(x_j, y_i) = X \times Y$ ■

Korollar 1.14
Sei X ein Hausdorffraum und $K \subseteq X$ kompakt. Dann ist K abgeschlossen.

Beweis: <u>z. Z.:</u> Komplement ist offen

Ist $X = K$, so ist K abgeschlossen in X. Andernfalls sei $y \in X \setminus K$. Für jedes $x \in K$ seien U_x bzw. V_y Umgebungen von x bzw. von y, sodass $U_x \cap V_y = \emptyset$.



Da K kompakt ist, gibt es endlich viele $x_1, \dots, x_n \in K$, sodass $\bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i} \supseteq K$.

$$\text{Sei } V := \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$$
$$\Rightarrow V \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i} \right) = \emptyset$$
$$\Rightarrow V \cap K = \emptyset$$
$\Rightarrow V$ ist Überdeckung von y, die ganz in $X \setminus K$ enthalten ist.
$\Rightarrow X \setminus K$ ist offen

Damit ist K abgeschlossen. ■

Korollar 1.15
Seien X, Y topologische Räume, $f : X \to Y$ stetig. Ist $K \subseteq X$ kompakt, so ist $f(K) \subseteq Y$ kompakt.

Beweis: Sei $(V_i)_{i \in I}$ offene Überdeckung von $f(K)$
$\overset{f\text{ stetig}}{\Longrightarrow} (f^{-1}(V_i))_{i \in I}$ ist offene Überdeckung von K
$\overset{\text{Kompakt}}{\Longrightarrow}$ es gibt $i_1, \dots, i_n$, sodass $f^{-1}(V_{i_1}), \dots, f^{-1}(V_{i_n})$ Überdeckung von K ist.
$\Rightarrow f(f^{-1}(V_{i_1})), \dots, f(f^{-1}(V_{i_n}))$ überdecken $f(K)$.

Es gilt: $f(f^{-1}(V)) = V \cap f(X)$ ■

Satz 1.16 (Heine-Borel)
Eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Beweis: „$\Rightarrow$“: Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$) kompakt.

Da $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ hausdorffsch sind, ist K nach Korollar 1.14 abgeschlossen. Nach Voraussetzung kann K mit endlich vielen offenen Kugeln von Radien 1 überdeckt werden $\Rightarrow K$ ist beschränkt.

„$\Leftarrow$“ Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ (oder $\mathbb{C}^n$) beschränkt und abgeschlossen.

Dann gibt es einen Würfel $W = \underbrace{[-N, N] \times \dots \times [-N, N]}_{n \text{ mal}}$ mit $A \subseteq W$ bzw. „Polyzylinder“
$Z = \{ (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid z_i \leq N \text{ für } i = 1, \dots, n \}$

Nach Korollar 1.13 und Korollar 1.11 ist W kompakt, also ist A nach Korollar 1.12 auch kompakt. Genauso ist Z kompakt, weil

$$\{ z \in \mathbb{C} \| z| \leq 1 \}$$

homöomorph zu

$$\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y)\| \leq 1 \}$$

ist. ■

1.6 Wege und Knoten

Definition 16

Sei X ein topologischer Raum.

a) Ein **Weg** in X ist eine stetige Abbildung $\gamma : [0,1] \to X$.

b) γ heißt **geschlossen**, wenn $\gamma(1) = \gamma(0)$ gilt.

c) γ heißt **einfach**, wenn $\gamma|_{[0,1]}$ injektiv ist.

Beispiel 16

Ist X diskret, so ist jeder Weg konstant, d. h. von der Form

$$\forall x \in [0,1] : \gamma(x) = c, \quad c \in X$$

Denn $\gamma([0,1])$ ist zusammenhängend für jeden Weg γ.

Definition 17

Ein topologischer Raum X heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ einen Weg $\gamma : [0,1] \to X$ gibt mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

Korollar 1.17

Sei X ein topologischer Raum.

(i) X ist wegzusammenhängend $\Rightarrow$ X ist zusammenhängend

(ii) X ist wegzusammenhängend $\not\Leftarrow$ X ist zusammenhängend

Beweis:

(i) Sei X ein wegzusammenhängender topologischer Raum, A_1, A_2 nichtleere, disjunkte, abgeschlossene Teilmengen von X mit $A_1 \cup A_2 = X$. Sei $x \in A_1, y \in A_2, \gamma : [0,1] \to X$ ein Weg von x nach y.

Dann ist $C := \gamma([0,1]) \subseteq X$ zusammenhängend, weil γ stetig ist.

$$C = \underbrace{(C \cap A_1)}_{\ni x} \cup \underbrace{(C \cap A_2)}_{\ni y}$$

ist Zerlegung in nichtleere, disjunkte, abgeschlossene Teilmengen $\Rightarrow$ Widerspruch

(ii) Sei $X = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^2 + y^2 = 1 \vee y = 1 + 2 \cdot e^{-\frac{1}{10}x} \right\}$.

Abbildung 1.8a veranschaulicht diesen Raum.

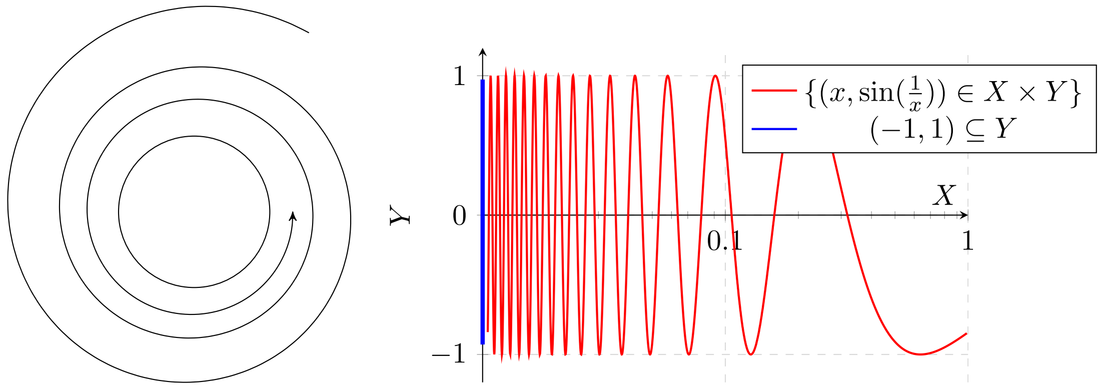
Sei $U_1 \cup U_2 = X, U_1 \neq U_2 = \emptyset, U_i$ offen. $X = C \cup S$. Dann ist $C \subseteq U_1$ oder $C \subseteq U_2$, weil C und S zusammenhängend sind.

Also ist $C = U_1$ und $S = U_2$ (oder umgekehrt).

Sei $\gamma \in C = U_1, \varepsilon > 0$ und $\mathfrak{B}_\varepsilon(y) \subseteq U_1$ eine Umgebung von y, die in U_1 enthalten ist.

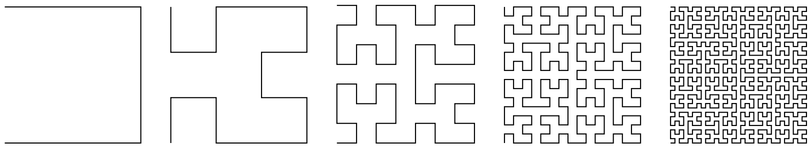
Aber: $\mathfrak{B}_\varepsilon(y) \cap S \neq \emptyset \Rightarrow$ Widerspruch ■

Achtung: Es gibt stetige, surjektive Abbildungen $[0,1] \to [0,1] \times [0,1]$. Ein Beispiel ist die in Abbildung 1.9 dargestellte Hilbert-Kurve.



(a) Spirale S mit Kreis C (b) Sinus

Abbildung 1.8: Beispiele für Räume, die zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend sind.



(a) $n = 1$ (b) $n = 2$ (c) $n = 3$ (d) $n = 4$ (e) $n = 5$

Abbildung 1.9: Hilbert-Kurve

Definition 18
Sei X ein topologischer Raum. Eine (geschlossene) **Jordankurve** in X ist ein Homöomorphismus $\gamma : [0, 1] \to C \subseteq X$ $(\gamma : S^1 \to C \subseteq X)$

Satz 1.18 (Jordanscher Kurvensatz)
Ist $C = \gamma([0, 1])$ eine geschlossene Jordankurve in $\mathbb{R}^2$, so hat $\mathbb{R}^2 \setminus C$ genau zwei Zusammenhangskomponenten, von denen eine beschränkt ist und eine unbeschränkt.

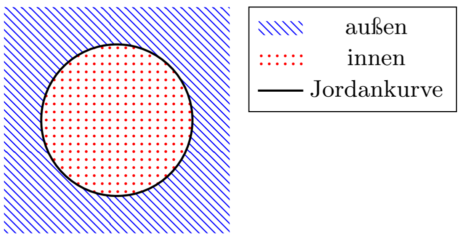


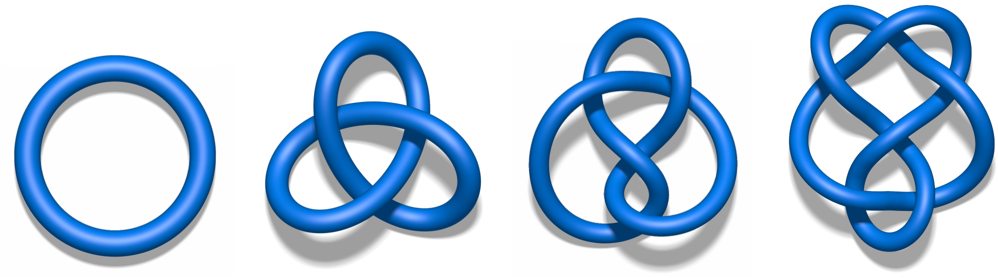
Abbildung 1.10: Die unbeschränkte Zusammenhangskomponente wird häufig inneres, die beschränkte äußeres genannt.

Beweis: ist technisch mühsam und wird daher hier nicht geführt. Literatu

Idee: Ersetze Weg C durch Polygonzug.

Definition 19
Eine geschlossene Jordankurve in $\mathbb{R}^3$ heißt **Knoten**.

Beispiel 17



(a) Trivialer Knoten (b) Kleeblattknoten (c) Achterknoten (d) 6_2-Knoten

Abbildung 1.11: Beispiele für verschiedene Knoten

Definition 20
Zwei Knoten $\gamma_1, \gamma_2 : S^1 \to \mathbb{R}^3$ heißen **äquivalent**, wenn es eine stetige Abbildung $H : S^1 \times [0,1] \Rightarrow \mathbb{R}^3$ gibt mit $H(z,0) = \gamma_1(z), H(z,1) = \gamma_2(z)$ und für jedes feste $t \in [0,1]$ ist $H_z : S^1 \to \mathbb{R}^2, z \mapsto H(z,t)$ ein Knoten. Die Abbildung H heißt **Isotopie** zwischen γ_1 und γ_2.

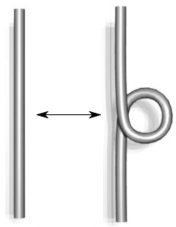
Definition 21
Ein **Knotendiagramm** eines Knotens γ ist eine Projektion $\pi : \mathbb{R}^3 \to E$ auf eine Ebene E, sodass $|(\pi|C)^{-1}(x)| \leq 2$ für jedes $x \in D$.

Ist $(\pi|C)^{-1}(x) = \{ y_1, y_2 \}$, so **liegt** y_1 **über** y_2, wenn $(y_1 - x) = \lambda(y_2 - x)$ für ein $\lambda > 1$ ist.

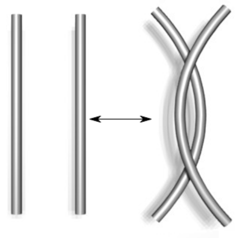
Satz 1.19 (Reidemeister)
Zwei endliche Knotendiagramme gehören genau dann zu äquivalenten Knoten, wenn sie durch endlich viele „Reidemeister-Züge“ in einander überführt werden können.

Beweis: Durch sorgfältige Fallunterscheidung. Literatur

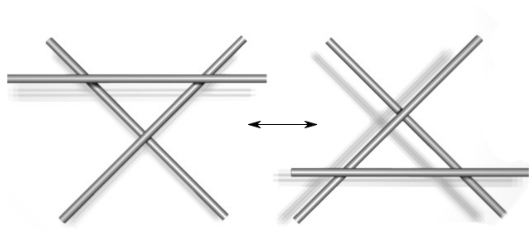
Definition 22
Ein Knotendiagramm heißt **3-färbbar**, wenn jeder Bogen von D so mit einer Farbe gefärbt werden kann, dass an jeder Kreuzung eine oder 3 Farben auftreten und alle 3 Farben auftreten.



(a) Ω_1



(b) Ω_2



(c) Ω_3

Abbildung 1.12: Reidemeister-Züge
Urheber:YAMASHITA Makoto

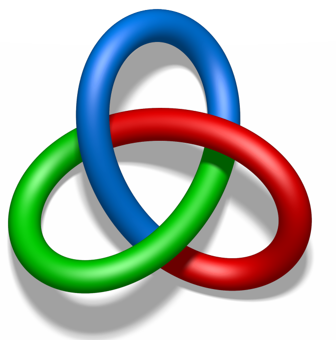


Abbildung 1.13: Ein 3-gefärber Kleeblattknoten

Übungsaufgaben

Aufgabe 1 (Sierpińskiraum)

Es sei $X := \{ 0, 1 \}$ und $\mathfrak{T}_X := \{ \emptyset, \{ 0 \}, X \}$. Dies ist der sogenannte Sierpińskiraum.

(a) Beweisen Sie, dass $(X, \mathfrak{T}_X)$ ein topologischer Raum ist.

(b) Ist $(X, \mathfrak{T}_X)$ hausdorffsch?

(c) Ist $\mathfrak{T}_X$ von einer Metrik erzeugt?

Aufgabe 2

Es sei $\mathbb{Z}$ mit der von den Mengen $U_{a,b} := a + b\mathbb{Z}(a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{ 0 \})$ erzeugten Topologie versehen.

Zeigen Sie:

(a) Jedes $U_{a,b}$ und jede einelementige Teilmenge von $\mathbb{Z}$ ist abgeschlossen.

(b) $\{ -1, 1 \}$ ist nicht offen.

(c) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Aufgabe 3 (Cantorsches Diskontinuum)

Für jedes $i \in \mathbb{N}$ sei $P_i := \{ 0, 1 \}$ mit der diskreten Topologie. Weiter Sei $P := \prod_{i \in \mathbb{N}} P_i$.

(a) Wie sehen die offenen Mengen von P aus?

(b) Was können Sie über den Zusammenhang von P sagen?

2 Mannigfaltigkeiten und Simpizidkomplexe

2.1 Topologische Mannigfaltigkeiten

Definition 23
Sei X ein topologischer Raum und $n \in \mathbb{N}$.

(a) Eine n-dimensionale **Karte** auf X ist ein Paar (U, φ), wobei $U \subseteq X$ offen und $\varphi : U \to V$ Homöomorphismus von U auf eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$.

(b) Ein n-dimensionaler **Atlas** auf X ist eine Familie $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ von Karten auf X, sodass $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.

(c) X heißt (topologische) n-dimensionale **Mannigfaltigkeit**, wenn X hausdorffsch ist, eine abzählbare Basis der Topologie hat und ein n-dimensionalen Atlas besitzt.

Bemerkung 9

(a) Es gibt surjektive, stetige Abbildungen $[0, 1] \to [0, 1] \times [0, 1]$

(b) Für $n \neq m$ sind $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ nicht homöomorph. Zum Beweis benutzt man den „Satz von der Gebietstreue“ (Brouwer):

Ist $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig und injektiv, so ist $f(U)$ offen.

Ist $n < m$ und $\mathbb{R}^m$ homöomorph zu $\mathbb{R}^n$, so wäre

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots, 0)$$

eine stetige injektive Abbildung. Also müsste $f(\mathbb{R}^n)$ offen sein $\Rightarrow$ Widerspruch

Beispiel 18

1) Jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ist eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einem Atlas aus einer Karte.

2) $\mathbb{C}^n$ ist eine $2n$-dimensionale Mannigfaltigkeit mit einem Atlas aus einer Karte:

$$(z_1, \dots, z_n) \mapsto (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n)$$

3) $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{ 0 \})/_\sim = S^n/_\sim$ und $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sind Mannigfaltigkeiten der Dimension n bzw. $2n$.

$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \bigcup_{i=0}^n U_i$,

$$\begin{aligned} U_i = \{ (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \mid x_i \neq 0 \} &\to \mathbb{R}^n \\ (x_0 : \dots : x_n) &\mapsto \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_i}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right) \\ (y_1 : \dots : y_{i-1} : 1 : y_i : \dots : y_n) &\leftarrow\!\shortmid (y_1, \dots, y_n) \end{aligned}$$

ist bijektiv.

Die $U_i,\ i = 0, \dots, n$ bilden einen n-dimensionalen Atals.

$$\begin{array}{ll} x = (1:0:0) & y = (0:1:1) \in U_2 \to \mathbb{R}^2 \\ \in U_0 \to \mathbb{R}^2 & y \mapsto (0,1) \\ x \mapsto (0,0) & \text{Umgebung: } \mathfrak{B}_1(0,1) \to \left\{ (w:z:1) \;\middle|\; w^2+z^2<1 \right\} = V_2 \end{array}$$

Umgebung $\mathfrak{B}_1(0,1) \to \{ (1:u:v) \mid \|(u,v)\| < 1 \} = v_1$

$V_1 \cap V_2 = \emptyset$?

$(a:b:c) \in V_1 \cap V_2$
$\Rightarrow a \neq 0$ und $(\frac{b}{a})^2 + (\frac{c}{a})^2 < 1 \Rightarrow \frac{c}{a} < 1$
$\Rightarrow c \neq 0$ und $(\frac{a}{c})^2 + (\frac{b}{c})^2 < 1 \Rightarrow \frac{a}{c} < 1$
$\Rightarrow$ Widerspruch

4) $S^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \;\middle|\; \|x\| = 1 \right\}$ ist n-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Karten: $O_i := \{ (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_i > 0 \} \to \mathfrak{B}_1(\underbrace{0, \dots, 0}_{\in \mathbb{R}^n})$

$(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1})$
$(x_1, \dots, x_{i-1}, \sqrt{1 - \sum_{k=1}^n x_k^2}, x_i, \cdots, x_n) \leftarrow\!\shortmid (x_1, \dots, x_n)$
$S^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} (C_i \cup D_i)$

5) $[0,1]$ ist keine Mannigfaltigkeit, denn:
Es gibt keine Umgebung von 0 in $[0,1]$, die homöomorph zu einem offenem Intervall ist.

6) $V_1 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x \cdot y = 0 \right\}$ ist keine Mannigfaltigkeit.

7) $V_2 = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x^3 = y^2 \right\}$ ist eine Mannigfaltigkeit.

8) $X = (\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}) \cup (O_1, O_2)$

$$U \subseteq X \text{ offen } \Leftrightarrow \begin{cases} U \text{ offen in } \mathbb{R} \setminus \{ 0 \}, & \text{falls } O_1 \notin U, O_2 \in U \\ \exists \varepsilon > 0 \text{ mit } (-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq U & \text{falls } O_1 \in U, O_2 \in U \end{cases}$$

Insbesondere sind $(\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}) \cup \{ O_1 \}$ und $(\mathbb{R} \setminus \{ 0 \}) \cup \{ O_2 \}$ offen und homöomorph zu $\mathbb{R}$.

Aber: X ist nicht hausdorffsch! Denn es gibt keine disjunkten Umgebungen von O_1 und O_2.

9) $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension n^2, weil offene Teilmengen von $\mathbb{R}^{n^2}$ eine Mannigfaltigkeit bilden.

Definition 24

Seien X, Y n-dimensionale Mannigfaltigkeiten, $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ offen, $\Phi : U \to V$ ein Homöomorphismus $Z = (X \dot\cup Y)/_\sim$ mit der von $u \sim \Phi(u) \forall u \in U$ erzeugten Äquivalenzrelation und der von $\sim$ induzierten Quotiententopologie.

Z heißt **Verklebung** von X und Y längs U und V. Z besitzt einen Atlas aus n-dimensionalen Karten. Falls Z hausdoffsch ist, ist Z eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit.

Abbildung 2.1: Zweifachtorus

Bilder mit Verklebung einfügen

Korollar 2.1

Sind X, Y Mannigfaltigkeiten der Dimension n bzw. m, so ist $X \times Y$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n + m$.

Beweis: Produkte von Karten sind Karten. ■

Beispiel 19

Mannigfaltigkeiten mit Dimension 1:

1) Offene Intervalle, $\mathbb{R}$, $(0, 1)$ sind alle homöomorph
2) S^1

Mannigfaltigkeiten mit Dimension 2:

1) $\mathbb{R}^2$
2) S^2 (0 Henkel)
3) T^2 (1 Henkel)
4) oder mehr Henkel, wie z.B. der Zweifachtorus in Abb. 2.1

Korollar 2.2

Sei $n \in \mathbb{N}, F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $X = V(F) := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid F(x) = 0 \}$ das „vanishing set".

Dann gilt:

a) X ist abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$
b) Ist $\text{grad}(F)(X) \neq 0 \forall x \in X$, so ist X eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n - 1$.

Beweis:

a) Sei $y \in \mathbb{R}^n \setminus V(F)$. Weil F stetig ist, gibt es $\delta > 0$, sodass $F(\mathfrak{B}_\delta(y)) \subseteq \mathfrak{B}_\varepsilon(F(y))$ mit $\varepsilon = \frac{1}{2}\|F(y)\|$. Folgt $\mathfrak{B}_\delta(y) \cap V(F) = \emptyset \Rightarrow \mathbb{R}^n \setminus V(F)$ ist offen.

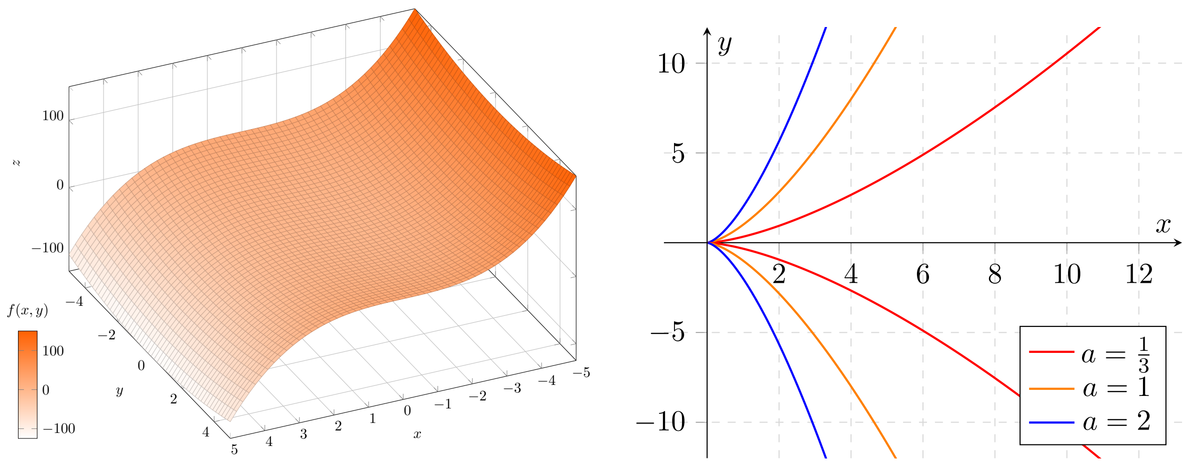
b) Sei $x \in X$ mit $\text{grad}(F)(x) \neq 0$, also o. B. d. A.$\frac{\partial F}{\partial X_1}(x) \neq 0$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $x' := (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Der Satz von der impliziten Funktion liefert nun: Es gibt Umgebungen U von x' und differenzierbare Funktionen $g : U \to \mathbb{R}$, sodass $G : U \to \mathbb{R}^n$, $u \mapsto (g(u), u)$ eine stetige Abbildung auf eine offene Umgebung V von x in X ist.

■

Beispiel 20

a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 1$, $V(F) = S^2$, $\operatorname{grad}(F) = (2x, 2y, 2z) \overset{b)}{\Rightarrow} S^n$ ist n-dimensionale Mannigfaltigkeit in $\mathbb{R}^{n+1}$

b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto y^2 - x^3$ Es gilt: $\operatorname{grad}(F) = (-3x^2, 2y)$. Also: $\operatorname{grad}(0, 0) = (0, 0)$.



(a) $F(x, y) = y^2 - x^3$ (b) $y^2 - ax^3 = 0$

Abbildung 2.2: Rechts ist die Neilsche Parabel für verschiedene Parameter a.

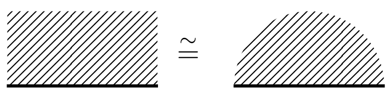
Daher ist Korollar nicht anwendbar, aber $V(F)$ ist trotzdem eine 1-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit.

Definition 25

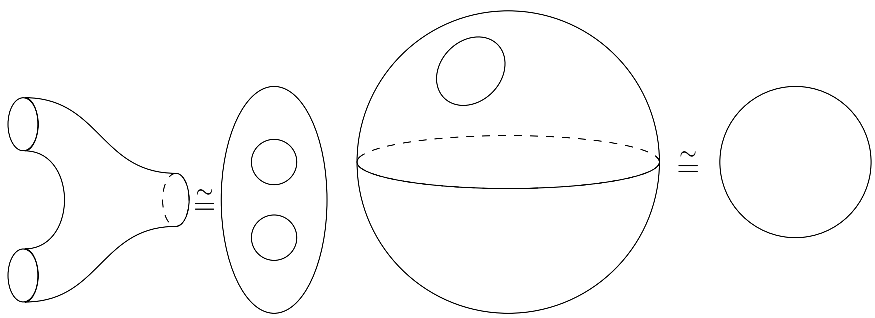
Sei X ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis der Topologie. X heißt n-dimensionale **Mannigfaltigkeit mit Rand**, wenn es einen Atlas (U_i, φ_i) gibt, wobei $U_i \subseteq X_i$ offen und φ_i ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge von

$$R^n_{+,0} := \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_m \geq 0 \}$$

ist. $R^n_{+,0}$ ist ein „Halbraum“.



(a) Halbraum



(b) Pair of pants (c) Sphäre mit einem Loch

Abbildung 2.3: Beispiele für Mannigfaltigkeiten mit Rand

Beispiel 21

Definition 26

Sei X eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand und Atlas (U_i, φ_i). Dann heißt

$$\partial X := \bigcup_{i \in I} \{ x \in U_i \mid \varphi_i(x)_n = 0 \}$$

Rand von X.

∂X ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1$.

Definition 27

Sei X eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$

a) Für $i, j \in I$ mit $U_i, U_j \neq \emptyset$ heißt

$$\varphi_{ij} := \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$$
$$\varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

Kartenwechsel oder **Übergangsfunktion**.

Bilder mit Verklebung einfügen

Übungsaufgaben

Aufgabe 4

Todo

Lösungen der Übungsaufgaben

Lösung zu Aufgabe 1

Teilaufgabe a) Es gilt:

(i) $\emptyset, X \in \mathfrak{T}_X$.

(ii) $\mathfrak{T}_X$ ist offensichtlich unter Durchschnitten abgeschlossen, d. h. es gilt für alle $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}_X : U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{T}_X$.

(iii) Auch unter beliebigen Vereinigungen ist $\mathfrak{T}_X$ abgeschlossen, d. h. es gilt für eine beliebige Indexmenge I und alle $U_i \in \mathfrak{T}_X$ für alle $i \in I : \bigcup_{i \in I} U_i \in \mathfrak{T}_X$

Also ist $(X, \mathfrak{T}_X)$ ein topologischer Raum.

Teilaufgabe b) Wähle $x = 1, y = 0$. Dann gilt $x \neq y$ und die einzige Umgebung von x ist X. Da $y = 0 \in X$ können also x und y nicht durch offene Mengen getrennt werden. $(X, \mathfrak{T}_X)$ ist also nicht hausdorffsch.

Teilaufgabe c) Nach Bemerkung 3 sind metrische Räume hausdorffsch. Da $(X, \mathfrak{T}_X)$ nach (b) nicht hausdorffsch ist, liefert die Kontraposition der Trennungseigenschaft, dass $(X, \mathfrak{T}_X)$ kein metrischer Raum sein kann.

Lösung zu Aufgabe 2

Teilaufgabe a)

Beh.: $\forall a \in \mathbb{Z} : \{ a \}$ ist abgeschlossen.

Sei $a \in \mathbb{Z}$ beliebig. Dann gilt:

Hat jemand diesen Beweis?

Teilaufgabe b)

Beh.: $\{ -1, 1 \}$ ist nicht offen

Bew.: durch Widerspruch

Annahme: $\{ -1, 1 \}$ ist offen.

Dann gibt es $T \subseteq \mathfrak{B}$, sodass $\bigcup_{M \in T} M = \{ -1, 1 \}$. Aber alle $U \in \mathfrak{B}$ haben unendlich viele Elemente. Auch endlich viele Schnitte von Elementen in $\mathfrak{B}$ haben unendlich viele Elemente $\Rightarrow$ keine endliche nicht-leere Menge kann in dieser Topologie offen sein $\Rightarrow \{ -1, 1 \}$ ist nicht offen. ■

Beh.: Es gibt unendlich viele Primzahlen.

Bew.: durch Widerspruch

Annahme: Es gibt nur endlich viele Primzahlen $p \in \mathbb{P}$

Dann ist

$$\mathbb{Z} \setminus \{ -1, +1 \} \overset{\text{FS d. Arithmetik}}{=} \bigcup_{p \in \mathbb{P}} U_{0,p}$$

endlich. Das ist ein Widerspruch zu $|\mathbb{Z}|$ ist unendlich und $|\{ -1, 1 \}|$ ist endlich. ■

Lösung zu Aufgabe 3

(a) <u>Beh.:</u> Die offenen Mengen von P sind Vereinigungen von Mengen der Form

$$\prod_{j \in J} U_j \times \prod_{i \in \mathbb{N}, i \neq j} P_i$$

wobei $J \subseteq \mathbb{N}$ endlich und $U_j \subseteq P_j$ offen ist.

Beweis: Nach Definition der Produkttopologie bilden Mengen der Form

$$\prod_{i \in J} U_j \times \prod_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ i \notin J}} P_i, \text{ wobei } J \subseteq \mathbb{N} \text{ endlich und } U_j \subseteq P_j \text{offen } \forall j \in J$$

eine Basis der Topologie. Damit sind die offenen Mengen von P Vereinigungen von Mengen der obigen Form. ■

(b) <u>Beh.:</u> Die Zusammenhangskomponenten von P sind alle einpunktig.

Beweis: Es seinen $x, y \in P$ und x sowie y liegen in der gleichen Zusammenhangskomponente $Z \subseteq P$. Da Z zusammenhängend ist und $\forall i \in I : p_i : P \to P_i$ ist stetig, ist $p_i(Z) \subseteq P_i$ zusammenhängend für alle $i \in \mathbb{N}$. Die zusammenhängenden Mengen von P_i sind genau $\{ 0 \}$ und $\{ 1 \}$, d. h. für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt entweder $p_i(Z) \subseteq \{ 0 \}$ oder $p_i(Z) \subseteq \{ 1 \}$. Es sei $z_i \in \{ 0, 1 \}$ so, dass $p_i(Z) \subseteq \{ z_i \}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Dann gilt also:

$$\underbrace{p_i(x)}_{=x_i} = z_i = \underbrace{p_i(y)}_{=y_i} \forall i \in \mathbb{N}$$

Somit folgt: $x = y$ ■

Symbolverzeichnis

$\mathfrak{B}$ Basis einer Topologie.
$\mathfrak{B}_\delta(x)$ δ-Kugel um x.
$\mathfrak{T}$ Topologie.

$\mathbb{N}$ Natürliche Zahlen.
$\mathbb{Z}$ Ganze Zahlen.
$\mathbb{Q}$ Rationale Zahlen.
$\mathbb{R}$ Reele Zahlen.
$\mathbb{R}^\times$ Multiplikative Einheitengruppe von $\mathbb{R}$.
$\mathbb{R}^+$ Echt positive reele Zahlen.
$\mathbb{C}$ Komplexe Zahlen.
$\mathbb{P}$ Projektiver Raum.

$\overline{M}$ Abschluss der Menge M.
M° Inneres der Menge M.
∂M Rand der Menge M.
$A \times B$ Kreuzprodukt zweier Mengen.
$\mathcal{P}(M)$ Potenzmenge von M.
$A \setminus B$ A ohne B.

$A \subseteq B$ Teilmengenbeziehung.
$A \subsetneq B$ echte Teilmengenbeziehung.
$A \cap B$ Schnitt.
$A \cup B$ Vereinigung.
$A \dot{\cup} B$ Disjunkte Vereinigung.

$[x]_\sim$ Äquivalenzklassen von x bzgl. $\sim$.
$X/_\sim$ X modulo $\sim$.
$\mathrm{GL}_n(K)$ Allgemeine lineare Gruppe (general linear group).
$\|x\|$ Norm von x.
$|x|$ Betrag von x.
Œ Ohne Einschränkung.
π_X Projektion auf X.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$ Skalarprodukt.
S^n Sphäre.
T^n Torus.
$f^{-1}(M)$ Urbild von M.

Index

abgeschlossen, 2
Abschluss, 3
Achterknoten, 18
Atlas, 21

Basis, 3
bergangsfunktion, 25

Cantorsches Diskontinuum, 20

dicht, 3

Färbbarkeit, 18

Grenzwert, 7

Hilbert-Kurve, 17
Homöomorphismus, 8

Inneres, 3
Isotopie, 18

Jordankurve, 17
    geschlossene, 17

Karte, 21
Kartenwechsel, 25
Kern
    offener, 3
Kleeblattknoten, 18
Knoten, 17, 16–18
    äquivalente, 18
    trivialer, 18
Knotendiagramm, 18
kompakt, 12

Limes, 7

Mannigfaltigkeit, 21
    mit Rand, 24
Metrik, 5
    diskrete, 6
    SNCF, 6

Neilsche Parabel, 23

offen, 2

Polyzylinder, 15
Produkttopologie, 4
Projektion
    stereographische, 9

Quotiententopologie, 4

Rand, 3, 25
Raum
    hausdorffscher, 7
    metrischer, 5
    topologischer, 2

Sierpińskiraum, 3, 20
Spurtopologie, 3
stetig, 8
Stetigkeit, 8–10
Subbasis, 3

Teilraum, 3
Topologie
    diskrete, 2, 6
    euklidische, 2
    triviale, 2
    Zariski, 2, 11, 13
Torus, ii
Total Unzusammenhängend, 28

Überdeckung, 13
Umgebung, 3

Verklebung, 22

Weg, 16
    einfacher, 16
    geschlossener, 16
Wegzusammenhang, 16

zusammenhängend, 10
Zusammenhang, 10–12
Zusammenhangskomponente, 12