Aufgabe 1

Gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 \\ -3 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: $Ax = b$ mit Gaußelimination und Spaltenpivotwahl lösen

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 6 & -6 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \mid \cdot \frac{1}{6} \\ \\ \\ \end{array} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 7 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 3 \quad -2 \\ + \\ + \end{array} \tag{1}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 8 \\ 0 & 6 & 1 & 8 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \mid \cdot \frac{1}{6} \quad -4 \\ + \end{array} \tag{3}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \mid \cdot \frac{3}{4} \end{array} \tag{4}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ + \\ \cdot \frac{-1}{6} \end{array} \tag{5}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} + \\ \\ \\ \end{array} \tag{6}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^T$ löst das LGS.

Aufgabe 2

Die *Kondition* eines Problems ist die Frage, wie sich Störungen der Eingabegrößen unabhängig vom gewählten Algorithmus auf die Lösung des Problems auswirken.

Bei dem lösen von linearen Gleichungssystemen sind die Eingabegrößen die Koeffizientenmatrix A und der Vektor b.

Der Begriff *Stabilität* ist auf einen konkreten Algorithmus zu beziehen und beschäftigt sich mit der Frage, wie sich Rundungsfehler, welche während der Durchführung des Algorithmus entstehen, auf die Lösung auswirken.

Die Stabilität eines Algorithmus bezeichnet, wie stark der Algorithmus das Ergebnis verfälschen kann. Man kann also die Stabilität der Gauß-Elimination angeben. Man kann allerdings nicht von einer Stabilität des Problems $A \cdot x = b$ sprechen.

Aufgabe 3

(Die Lösung findet ihr bei Klausur 3 / Aufgabe 3, da die Aufgaben identisch sind.)

Gegeben sei die Fixpunktiteration $x_{k+1} = F(x_k)$ mit

$$F(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

Sei $A := [\frac{7}{4}, \frac{8}{4}]$ ein Intervall.

Behauptung: $F(x)$ ist auf A eine Kontraktion.

Beweis:

z.Z.: $\exists L \in [0,1) : \forall x, y \in A : ||F(x) - F(y)|| \leq L \cdot ||x - y||$

TODO

(Die Lösung findet ihr bei Klausur 3 / Aufgabe 3, da die Aufgaben identisch sind.)

Aufgabe 4

(Die Lösung findet ihr bei Klausur 2 / Aufgabe 3, da die Aufgaben identisch sind.)

Gegeben seien die Stützpunkte

f_i	7	1	-1	7
x_i	-1	0	1	2

Teilaufgabe a)

$$s$$

Teilaufgabe b)