Aufgabe 1

Teilaufgabe a)

Gegeben:

$$A := \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 2 & 5 & 8 \\ 8 & 8 & 29 \end{pmatrix}$$

Aufgabe: Cholesky-Zerlegung $A = L \cdot L^T$ berechnen

Rechenweg:

Algorithm 1 Cholesky-Zerlegung

```
function CHOLESKY(A ∈ ℝ^{n×n})
    L = { 0 } ∈ ℝ^{n×n}                                   ▷ Initialisiere L
    for (k = 1;  k ≤ n;  k++) do
        L_{k,k} = sqrt( A_{k,k} − Σ_{i=1}^{k−1} L_{k,i}^2 )
        for (i = k + 1;  i ≤ n;  i++) do
            L_{i,k} = ( A_{i,k} − Σ_{j=1}^{k−1} L_{i,j} · L_{k,j} ) / L_{k,k}
        end for
    end for
    return L
end function
```

Lösung: $L = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Teilaufgabe b)

Gesucht: $\det(A)$

Sei $P \cdot A = L \cdot R$, die gewohnte LR-Zerlegung.

Dann gilt:

$$\det(A) = \frac{\det(L) \cdot \det(R)}{\det(P)}$$

$\det(L) = 1$, da alle Diagonalelemente 1 sind und es sich um eine strikte untere Dreiecksmatrix handelt.

$\det(R) = r_{11} \cdot \ldots \cdot r_{nn}$, da es sich um eine obere Dreiecksmatrix handelt.

$\det(P) \in \{ 1, -1 \}$

Das Verfahren ist also:

Algorithm 2 Determinante berechnen

Require: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
  $P, L, R \leftarrow$ LRZerl(A)
  $x \leftarrow 1$
  for i in $1..n$ **do**
    $x \leftarrow x \cdot r_{ii}$
    $x \leftarrow x \cdot p_{ii}$
  end for

Alternativ kann man auch in einer angepassten LR-Zerlegung direkt die Anzahl an Zeilenvertauschungen zählen. Dann benötigt man P nicht mehr. Ist die Anzahl der Zeilenvertauschungen ungerade, muss das Produkt der $r_i i$ negiert werden.

Aufgabe 2

Teilaufgabe a)

Behauptung: Für $x \in \mathbb{R}$ gilt, dass $cos(x_k) = x_{k+1}$ gegen den einzigen Fixpunkt $x^* = cos(x^*)$ konvergiert.

Beweis: Sei $D := [-1, 1]$.
Trivial: D ist abgeschlossen.

Sei $x \in D$, so gilt:

$$0 < cos(x) \leq 1$$

Also: $cos(x) \in D$.
Wenn $x \notin D$, so gilt $y := cos(x)$ und $cos(y) \in D$. D.h. bereits nach einem Iterationschritt wäre $cos(x) \in D$ für $x \in \mathbb{R}$! Dies ist wichtig, da damit gezeigt ist, dass $cos(x_k) = x_{k+1}$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ konvergiert! Es kommt nur dieser einzige Iteratationsschritt für $x \notin \mathbb{R}$ hinzu.

Nun gilt mit $x, y \in D, x < y, \xi \in (x, y)$ und dem Mittelwert der Differentialrechnung:

$$\begin{aligned}
\frac{cos(x) - cos(y)}{x - y} &= cos'(\xi) \\
\Leftrightarrow cos(x) - cos(y) &= cos'(\xi) * (x - y) \\
\Leftrightarrow |cos(x) - cos(y)| &= |cos'(\xi) * (x - y)| \leq |cos'(\xi)| * |(x - y)|
\end{aligned}$$

Da $\xi \in (0, 1)$ gilt:

$$0 \leq |cos'(\xi)| = |sin(\xi)| < 1$$

Damit ist gezeigt, dass $cos(x) : D \to D$ Kontraktion auf D.

Damit sind alle Voraussetzung des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt.

Nach dem Banachschen Fixpunktsatz folgt die Aussage.

Aufgabe 3

Teilaufgabe a)

$$L_0(x) = -\frac{1}{6} \cdot (x^3 - 3x^2 + 2x) \tag{1}$$
$$L_1(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^3 - 2x^2 - x + 2) \tag{2}$$
$$L_2(x) = -\frac{1}{2} \cdot (x^3 - x^2 - 2x) \tag{3}$$
$$L_3(x) = \frac{1}{6} \cdot (x^3 - x) \tag{4}$$

Damit ergibt sich:

$$p(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 1 \tag{5}$$

Anmerkung: Es ist in der Klausur allerdings nicht notwendig die Monomdarstellung zu berechnen außer es wird explizit verlangt. (Das spart viel Zeit)

Teilaufgabe b)

Zunächst die dividierten Differenzen berechnen:

$$f[x_0] = 7, \qquad f[x_1] = 1, \qquad f[x_2] = -1, \qquad f[x_3] = 7 \tag{6}$$
$$f[x_0, x_1] = -6, \qquad f[x_1, x_2] = -2, \qquad f[x_2, x_3] = 8 \tag{7}$$
$$f[x_0, x_1, x_2] = 2, \qquad f[x_1, x_2, x_3] = 5 \tag{8}$$
$$f[x_0, x_1, x_2, x_3] = 1 \tag{9}$$

Insgesamt ergibt sich also

$$p(x) = 7 - (x + 1) \cdot 6 + (x + 1) \cdot x \cdot 2 + (x + 1) \cdot x \cdot (x - 1) \tag{10}$$

Aufgabe 4

Teilaufgabe a)

1. Ordnung 3 kann durch geschickte Gewichtswahl erzwungen werden.
2. Ordnung 4 ist automatisch gegeben, da die QF symmetrisch sein soll.
3. Aufgrund der Symmetrie gilt Äquivalenz zwischen Ordnung 5 und 6. Denn eine hätte die QF Ordnung 5, so wäre wegen der Symmetrie Ordnung 6 direkt gegeben. Ordnung 6 wäre aber bei der Quadraturformel mit 3 Knoten das Maximum, was nur mit der Gauß-QF erreicht werden kann. Da aber $c_1 = 0$ gilt, kann es sich hier nicht um die Gauß-QF handeln. Wegen erwähnter Äquivalenz kann die QF auch nicht Ordnung 5 haben.

Da $c_1 = 0$ gilt, muss $c_3 = 1$ sein (Symmetrie). Und dann muss $c_2 = \frac{1}{2}$ sein. Es müssen nun die Gewichte bestimmt werden um Ordnung 3 zu garantieren mit:

$$b_i = \int_0^1 L_i(x)\mathrm{d}x \tag{11}$$

$$b_1 = \frac{1}{6}, \tag{12}$$

$$b_2 = \frac{4}{6}, \tag{13}$$

$$b_3 = \frac{1}{6} \tag{14}$$

Teilaufgabe b)

Als erstes ist festzustellen, dass es sich hier um die Simpsonregel handelt und die QF

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a) \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(f(a) + 4 \cdot f(\frac{a+b}{2}) + f(b) \right) \tag{15}$$

ist. Wenn diese nun auf N Intervalle aufgepflittet wird gilt folgendes:

$$h = \frac{(b-a)}{N} \tag{16}$$

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = h \cdot \frac{1}{6} \cdot \left[f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{N-1} f(a + i \cdot h) + 4 \cdot \sum_{l=0}^{N-1} f(a + \frac{1}{2} \cdot h + l \cdot h) \right] \tag{17}$$

$\sum_{i=1}^{N-1} f(a + i \cdot h)$ steht für die Grenzknoten (deshalb werden sie doppelt gezählt). Von den Grenzknoten gibt es insgesamt $N - 2$ Stück, da die tatsächlichen Integralgrenzen a und b nur einmal in die Berechnung mit einfließen.

$\sum_{l=0}^{N-1} f(a + \frac{1}{2} \cdot h + l \cdot h)$ sind die jeweiligen mittleren Knoten der Intervalle. Davon gibt es N Stück.

Teilaufgabe c)

TODO

Aufgabe 5

Zunächst ist nach der Familie von Quadraturformeln gefragt, für die gilt: ($p :=$ Ordnung der QF)

$$s = 3 \tag{18}$$
$$0 = c_1 < c_2 < c_3 \tag{19}$$
$$p \geq 4 \tag{20}$$

Nach Satz 29 sind in der Familie genau die QFs, für die gilt:
Für alle Polynome $g(x)$ mit Grad ≤ 0 gilt:

$$\int_0^1 M(x) \cdot g(x) \mathrm{d}x = 0 \tag{21}$$

Es gilt $g(x) = c$ für eine Konstante c, da der Grad von $g(x)$ 0 ist. Also ist 21 gleichbedeutend mit:

$$\int_0^1 M(x) \cdot c \mathrm{d}x = 0 \tag{22}$$
$$\Leftrightarrow c \cdot \int_0^1 M(x) \mathrm{d}x = 0 \tag{23}$$
$$\Leftrightarrow \int_0^1 M(x) \mathrm{d}x = 0 \tag{24}$$
$$\Leftrightarrow \int_0^1 (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \mathrm{d}x = 0 \tag{25}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot (c_2 + c_3) + \frac{1}{2} \cdot c_2 \cdot c_3 = 0 \tag{26}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \cdot c_3}{\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot c_3} = c_2 \tag{27}$$

Natürlich müssen auch die Gewichte optimal gewählt werden. Dafür wird Satz 28 genutzt:
Sei $b^T = (b_1, b_2, b_3)$ der Gewichtsvektor. Sei zudem $C := \begin{pmatrix} {c_1}^0 & {c_2}^0 & {c_3}^0 \\ {c_1}^1 & {c_2}^1 & {c_3}^1 \\ {c_1}^2 & {c_2}^2 & {c_3}^2 \end{pmatrix}$.

Dann gilt: C ist invertierbar und $b = C^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Es gibt genau eine symmetrische QF in der Familie. Begründung:
Aus $c_1 = 0$ folgt, dass $c_3 = 0$ ist. Außerdem muss $c_2 = \frac{1}{2}$ sein. Also sind die Knoten festgelegt. Da wir die Ordnung $\geq s = 3$ fordern, sind auch die Gewichte eindeutig.
Es handelt sich um die aus der Vorlesung bekannte Simpsonregel.