

Raum, topologischer
Menge, offene
Menge, abgeschlossene

Umgebung
lokal

Inneres
Kern, offener
Abschluss
Rand
dicht

Basis
Subbasis

Spurtopologie
Teilraum
Teilraumtopologie
Unterraumtopologie

Produkttopologie

Quotiententopologie

Metrik
Raum, metrischer

Sei (X, \mathfrak{T}) ein topologischer Raum und $x \in X$.

Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt **Umgebung** von x , wenn es ein $U_0 \in \mathfrak{T}$ gibt mit $x \in U_0$ und $U_0 \subseteq U$.

Gilt eine Eigenschaft in einer Umgebung, so sagt man, dass die Eigenschaft **lokal** gilt.

Ein **topologischer Raum** ist ein Paar (X, \mathfrak{T}) bestehend aus einer Menge X und $\mathfrak{T} \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit folgenden Eigenschaften

- (i) $\emptyset, X \in \mathfrak{T}$
- (ii) Sind $U_1, U_2 \in \mathfrak{T}$, so ist $U_1 \cap U_2 \in \mathfrak{T}$
- (iii) Ist I eine Menge und $U_i \in \mathfrak{T}$ für jedes $i \in I$, so ist $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathfrak{T}$

Die Elemente von \mathfrak{T} heißen **offene Teilmengen** von X . $A \subseteq X$ heißt **abgeschlossen**, wenn $X \setminus A$ offen ist.

Sei (X, \mathfrak{T}) ein topologischer Raum.

a) $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{T}$ heißt **Basis** der Topologie \mathfrak{T} , wenn jedes $U \in \mathfrak{T}$ Vereinigung von Elementen aus \mathfrak{B} ist.

b) $\mathcal{S} \subseteq \mathfrak{T}$ heißt **Subbasis** der Topologie \mathfrak{T} , wenn jedes $U \in \mathfrak{T}$ Vereinigung von endlichen Durchschnitten von Elementen aus \mathcal{S} ist.

Sei (X, \mathfrak{T}) ein topologischer Raum und $M \subseteq X$ eine Teilmenge.

a) $M^\circ := \{x \in M \mid M \text{ ist Umgebung von } x\} = \bigcup_{\substack{U \subseteq M \\ U \in \mathfrak{T}}} U$

heißt **Inneres** oder **offener Kern** von M .

b) $\overline{M} := \bigcap_{\substack{M \subseteq A \\ A \text{ abgeschlossen}}} A$ heißt **abgeschlossene Hülle** oder **Ab-**

schluss von M .

c) $\partial M := \overline{M} \setminus M^\circ$ heißt **Rand** von M .

d) M heißt **dicht** in X , wenn $\overline{M} = X$ ist.

Seien X_1, X_2 topologische Räume.

$U \subseteq X_1 \times X_2$ sei offen, wenn es zu jedem $x = (x_1, x_2) \in U$ Umgebungen U_i um x_i mit $i = 1, 2$ gibt, sodass $U_1 \times U_2 \subseteq U$ gilt.

$\mathfrak{T} = \{U \subseteq X_1 \times X_2 \mid U \text{ offen}\}$ ist eine Topologie auf $X_1 \times X_2$. Sie heißt **Produkttopologie**.

$\mathfrak{B} = \{U_1 \times U_2 \mid U_i \text{ offen in } X_i, i = 1, 2\}$ ist eine Basis von \mathfrak{T} .

Sei (X, \mathfrak{T}) ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$.

$\mathfrak{T}_Y := \{U \cap Y \mid U \in \mathfrak{T}\}$ ist eine Topologie auf Y .

\mathfrak{T}_Y heißt **Teilraumtopologie** und (Y, \mathfrak{T}_Y) heißt ein **Teilraum** von (X, \mathfrak{T}) .

Sei X eine Menge. Eine Abbildung $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ heißt **Metrik**, wenn gilt:

(i) Definitheit: $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y \quad \forall x, y \in X$

(ii) Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$

(iii) Dreiecksungleichung: $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x, y, z \in X$

Das Paar (X, d) heißt ein **metrischer Raum**.

Sei X ein topologischer Raum, \sim eine Äquivalenzrelation auf X , $\overline{X} = X/\sim$ sei die Menge der Äquivalenzklassen, $\pi : X \rightarrow \overline{X}$, $x \mapsto [x]_\sim$.

$\mathfrak{T}_{\overline{X}} := \{U \subseteq \overline{X} \mid \pi^{-1}(U) \in \mathfrak{T}_X\}$

$(\overline{X}, \mathfrak{T}_{\overline{X}})$ heißt **Quotiententopologie**.

Isometrie

Raum, hausdorffscher

**Grenzwert
Limes**

**Abbildung, stetige
Homöomorphismus**

zusammenhängend

Zusammenhangskomponente

Überdeckung

Raum, kompakter

Ein topologischer Raum X heißt **hausdorffsch**, wenn es für je zwei Punkte $x \neq y$ in X Umgebungen U_x um x und U_y um y gibt, sodass $U_x \cap U_y = \emptyset$.

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) metrische Räume und $\varphi : X \rightarrow Y$ eine Abbildung mit

$$\forall x_1, x_2 \in X : d_X(x_1, x_2) = d_Y(\varphi(x_1), \varphi(x_2))$$

Dann heißt φ eine **Isometrie** von X nach Y .

Seien $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

- a) f heißt **stetig** : $\Leftrightarrow \forall U \in \mathfrak{T}_Y : f^{-1}(U) \in \mathfrak{T}_X$.
- b) f heißt **Homöomorphismus**, wenn f stetig ist und es eine stetige Abbildung $g : Y \rightarrow X$ gibt, sodass $g \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ g = \text{id}_Y$.

Sei X ein topologischer Raum und $(x_{n \in \mathbb{N}})$ eine Folge in X . $x \in X$ heißt **Grenzwert** oder **Limes** von (x_n) , wenn es für jede Umgebung U von x ein n_0 gibt, sodass $x_n \in U$ für alle $n \geq n_0$.

Sei X ein topologischer Raum.
Für $x \in X$ sei $Z(x) \subseteq X$ definiert durch

$$Z(x) := \bigcup_{\substack{A \subseteq X \text{ zhgd.} \\ x \in A}} A$$

$Z(x)$ heißt **Zusammenhangskomponente**.

Ein Raum X heißt **zusammenhängend**, wenn es keine offenen, nichtleeren Teilmengen U_1, U_2 von X gibt mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ und $U_1 \cup U_2 = X$.

Ein topologischer Raum X heißt **kompakt**, wenn jede offene Überdeckung von X

$$\mathfrak{U} = \{U_i\}_{i \in I} \text{ mit } U_i \text{ offen in } X$$

eine endliche Teilüberdeckung

$$\bigcup_{i \in J \subseteq I} U_i = X \text{ mit } |J| \in \mathbb{N}$$

besitzt.

Sei X eine Menge und $\mathfrak{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$.
 \mathfrak{U} heißt eine **Überdeckung** von X , wenn gilt:

$$\forall x \in X : \exists M \in \mathfrak{U} : x \in M$$

Weg
Weg, geschlossener
Weg, einfacher

Wegzusammenhang

Jordankurve
Jordankurve, geschlossene

Knoten

Knoten, äquivalente
Isotopie

Knotendiagramm

Färbbarkeit

Karte
Atlas
Mannigfaltigkeit

Ein topologischer Raum X heißt **wegzusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ einen Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ gibt mit $\gamma(0) = x$ und $\gamma(1) = y$.

Sei X ein topologischer Raum.

- a) Ein **Weg** in X ist eine stetige Abbildung $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$.
- b) γ heißt **geschlossen**, wenn $\gamma(1) = \gamma(0)$ gilt.
- c) γ heißt **einfach**, wenn $\gamma|_{[0,1]}$ injektiv ist.

Eine geschlossene Jordankurve in \mathbb{R}^3 heißt **Knoten**.

Sei X ein topologischer Raum. Eine (geschlossene) **Jordan-Kurve** in X ist ein Homöomorphismus $\gamma : [0, 1] \rightarrow C \subseteq X$ bzw. $\gamma : S^1 \rightarrow C \subseteq X$.

Sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Knoten, E eine Ebene und $\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow E$ eine Projektion auf E .

π heißt **Knotendiagramm** von γ , wenn gilt:

$$|\pi^{-1}(x)| \leq 2 \quad \forall x \in \pi(\gamma)$$

Ist $(\pi|_{\gamma([0,1])})^{-1}(x) = \{y_1, y_2\}$, so **liegt y_1 über y_2** , wenn gilt:

$$\exists \lambda > 1 : (y_1 - x) = \lambda(y_2 - x)$$

Zwei Knoten $\gamma_1, \gamma_2 : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ heißen **äquivalent**, wenn es eine stetige Abbildung

$$H : S^1 \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$$

gibt mit

$$H(z, 0) = \gamma_1(z) \quad \forall z \in S^1$$

$$H(z, 1) = \gamma_2(z) \quad \forall z \in S^1$$

und für jedes feste $t \in [0, 1]$ ist

$$H_z : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3, z \mapsto H(z, t)$$

ein Knoten. Die Abbildung H heißt **Isotopie** zwischen γ_1 und γ_2 .

Sei (X, \mathfrak{T}) ein topologischer Raum und $n \in \mathbb{N}$.

- a) Eine n -dimensionale **Karte** auf X ist ein Paar (U, φ) , wobei $U \in \mathfrak{T}$ und $\varphi : U \rightarrow V$ Homöomorphismus von U auf eine offene Teilmenge $V \subseteq \mathbb{R}^n$.
- b) Ein n -dimensionaler **Atlas** \mathcal{A} auf X ist eine Familie $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$ von Karten auf X , sodass $\bigcup_{i \in I} U_i = X$.
- c) X heißt (topologische) n -dimensionale **Mannigfaltigkeit**, wenn X hausdorffsch ist, eine abzählbare Basis der Topologie hat und einen n -dimensionalen Atlas besitzt.

Ein Knotendiagramm heißt **3-färbbar**, wenn jeder Bogen von D so mit einer Farbe gefärbt werden kann, dass an jeder Kreuzung eine oder 3 Farben auftreten und alle 3 Farben auftreten.

Verklebung

Mannigfaltigkeit, mit Rand

Rand

Übergangsfunktion

Mannigfaltigkeit, differenzierbare
Mannigfaltigkeit, glatte

verträglich
 C^k -Struktur
Struktur, differenzierbare

Abbildung, differenzierbare
Diffeomorphismus

Fläche, reguläre
Parametrisierung, reguläre

Sei X ein Hausdorffraum mit abzählbarer Basis der Topologie. X heißt n -dimensionale **Mannigfaltigkeit mit Rand**, wenn es einen Atlas (U_i, φ_i) gibt, wobei $U_i \subseteq X_i$ offen und φ_i ein Homöomorphismus auf eine offene Teilmenge von

$$\mathbb{R}_{+,0}^n := \{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0 \}$$

ist.

Seien X, Y n -dimensionale Mannigfaltigkeiten, $U \subseteq X$ und $V \subseteq Y$ offen, $\Phi : U \rightarrow V$ ein Homöomorphismus $Z = (X \dot{\cup} Y)/\sim$ mit der von $u \sim \Phi(u) \forall u \in U$ erzeugten Äquivalenzrelation und der von \sim induzierten Quotiententopologie. Z heißt **Verklebung** von X und Y längs U und V . Z besitzt einen Atlas aus n -dimensionalen Karten. Falls Z hausdorffsch ist, ist Z eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit.

Sei X eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$

Für $i, j \in I$ mit $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ heißt

$$\begin{aligned} \varphi_{ij} &:= \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \\ \varphi_i(U_i \cap U_j) &\rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j) \end{aligned}$$

Kartenwechsel oder **Übergangsfunktion**.

Sei X eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Rand und Atlas \mathcal{A} . Dann heißt

$$\partial X := \bigcup_{(U, \varphi) \in \mathcal{A}} \{ x \in U \mid \varphi(x) = 0 \}$$

Rand von X .

Sei X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^k ($k \in \mathbb{N} \cup \{ \infty \}$) mit Atlas $\mathcal{A} = (U_i, \varphi_i)_{i \in I}$.

a) Eine Karte (U, φ) auf X heißt **verträglich** mit \mathcal{A} , wenn alle Kartenwechsel $\varphi \circ \varphi_i^{-1}$ und $\varphi_i \circ \varphi^{-1}$ ($i \in I$ mit $U_i \cap U \neq \emptyset$) differenzierbar von Klasse C^k sind.

b) Die Menge aller mit \mathcal{A} verträglichen Karten auf X bildet einen maximalen Atlas der Klasse C^k . Er heißt **C^k -Struktur** auf X .

Eine C^∞ -Struktur heißt auch **differenzierbare Struktur** auf X .

Sei X eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit mit Atlas $(U_i, \varphi_i)_{i \in I}$.

- a) X heißt **differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^k** , wenn jede Kartenwechselabbildung φ_{ij} , $i, j \in I$ k -mal stetig differenzierbar ist.
- b) X heißt **differenzierbare Mannigfaltigkeit**, wenn X eine differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^∞ ist.

$S \subseteq \mathbb{R}^3$ heißt **reguläre Fläche** : $\Leftrightarrow \forall s \in S \exists$ Umgebung $V(s) \subseteq \mathbb{R}^3 \exists U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen: \exists differenzierbare Abbildung $F : U \rightarrow V \cap S$: $\text{Rg}(J_F(u)) = 2 \quad \forall u \in U$.

F heißt (lokale) **reguläre Parametrisierung** von S .

$$F(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

$$J_F(u, v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(p) & \frac{\partial x}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(p) & \frac{\partial y}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(p) & \frac{\partial z}{\partial v}(p) \end{pmatrix}$$

Seien X, Y differenzierbare Mannigfaltigkeiten der Dimension n bzw. m , $x \in X$.

- a) Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt **differenzierbar** in x (von Klasse C^k), wenn es Karten (U, φ) von X mit $x \in U$ und (V, ψ) von Y mit $f(U) \subseteq V$ gibt, sodass $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ stetig differenzierbar von Klasse C^k in $\varphi(x)$ ist.
- b) f heißt **differenzierbar** (von Klasse C^k), wenn f in jedem $x \in X$ differenzierbar ist.
- c) f heißt **Diffeomorphismus**, wenn f differenzierbar von Klasse C^∞ ist und es eine differenzierbare Abbildung $g : Y \rightarrow X$ von Klasse C^∞ gibt mit $g \circ f = \text{id}_X$ und $f \circ g = \text{id}_Y$.

Gruppe, topologische
Lie-Gruppe

Lage, allgemeine
Punkt
Hülle, konvexe

Standard-Simplex
Simplex
Teilsimplex
Seite

Simplizialkomplex
Realisierung, geometrische
Dimension

Abbildung, simpliziale

Eulerzahl

Graph
Kreis
Baum

Triangulierung

Seien $v_0, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ Punkte.

a) v_0, \dots, v_k sind in **allgemeiner Lage**

\Leftrightarrow es gibt keinen $(k-1)$ -dimensionalen affinen Untervektorraum, der v_0, \dots, v_k enthält
 $\Leftrightarrow v_1 - v_0, \dots, v_k - v_0$ sind linear unabhängig.

b) $\text{conv}(v_0, \dots, v_k) := \left\{ \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1 \right\}$

heißt die **konvexe Hülle** von v_0, \dots, v_k .

Sei G eine Mannigfaltigkeit und (G, \circ) eine Gruppe.

a) G heißt **topologische Gruppe**, wenn die Abbildungen
 $\circ : G \times G \rightarrow G$ und $\iota : G \rightarrow G$ definiert durch

$$g \circ h := g \cdot h \text{ und } \iota(g) := g^{-1}$$

stetig sind.

b) Ist G eine differenzierbare Mannigfaltigkeit, so heißt
 G **Lie-Gruppe**, wenn (G, \circ) und (G, ι) differenzierbar
sind.

- a) Eine endliche Menge K von Simplizes im \mathbb{R}^n heißt (endlicher) **Simplizialkomplex**, wenn gilt:
- (i) Für $\Delta \in K$ und $S \subseteq \Delta$ Teilsimplex ist $S \in K$.
 - (ii) Für $\Delta_1, \Delta_2 \in K$ ist $\Delta_1 \cap \Delta_2$ leer oder ein Teilsimplex von Δ_1 und von Δ_2 .
- b) $|K| := \bigcup_{\Delta \in K} \Delta$ (mit Teilraumtopologie) heißt **geometrische Realisierung** von K .
- c) Ist $d = \max \{ k \in \mathbb{N}_0 \mid K \text{ enthält } k\text{-Simplex} \}$, so heißt d die **Dimension** von K .

- a) Sei $\Delta^n = \text{conv}(e_0, \dots, e_n) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ die konvexe Hülle der Standard-Basisvektoren e_0, \dots, e_n .
Dann heißt Δ^n **Standard-Simplex** und n die Dimension des Simplex.
- b) Für Punkte v_0, \dots, v_k im \mathbb{R}^n in allgemeiner Lage heißt $\Delta(v_0, \dots, v_k) = \text{conv}(v_0, \dots, v_k)$ ein **k -Simplex** in \mathbb{R}^n .
- c) Ist $\Delta(v_0, \dots, v_k)$ ein k -Simplex und $I = \{i_0, \dots, i_r\} \subseteq \{0, \dots, k\}$, so ist $s_{i_0, \dots, i_r} := \text{conv}(v_{i_0}, \dots, v_{i_r})$ ein r -Simplex und heißt **Teilsimplex** oder **Seite** von Δ .

Sei K ein endlicher Simplizialkomplex. Für $n \geq 0$ sei $a_n(K)$ die Anzahl der n -Simplizes in K .

Dann heißt

$$\chi(K) := \sum_{n=0}^{\dim K} (-1)^n a_n(K)$$

Eulerzahl (oder Euler-Charakteristik) von K .

Seien K, L Simplizialkomplexe. Eine stetige Abbildung

$$f : |K| \rightarrow |L|$$

heißt **simplizial**, wenn für jedes $\Delta \in K$ gilt:

- a) $f(\Delta) \in L$
- b) $f|_{\Delta} : \Delta \rightarrow f(\Delta)$ ist eine affine Abbildung.

Sei X ein topologischer Raum, K ein Simplizialkomplex und

$$h : |K| \rightarrow X$$

ein Homöomorphismus von der geometrischen Realisierung $|K|$ auf X . Dann heißt h eine **Triangulierung** von X .

- a) Ein 1D-Simplizialkomplex heißt **Graph**.
- b) Ein Graph, der homöomorph zu S^1 ist, heißt **Kreis**.
- c) Ein zusammenhängender Graph heißt **Baum**, wenn er keinen Kreis enthält.

Homologiegruppe
Betti-Zahl

Weg, homotope
Homotopie

Weg, zusammengesetzter

Inklusionsabbildung
Retraktion
Deformationsretrakt

Fundamentalgruppe

einfach zusammenhängend

Abbildung, homotope

Überlagerung

Sei X ein topologischer Raum, $a, b \in X$, $\gamma_1, \gamma_2 : I \rightarrow X$ Wege von a nach b , d. h. $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = a$, $\gamma_1(1) = \gamma_2(1) = b$

γ_1 und γ_2 heißen **homotop**, wenn es eine stetige Abbildung $H : I \times I \rightarrow X$ mit

$$H(t, 0) = \gamma_1(t) \quad \forall t \in I$$

$$H(t, 1) = \gamma_2(t) \quad \forall t \in I$$

und $H(0, s) = a$ und $H(1, s) = b$ für alle $s \in I$ gibt. Dann schreibt man: $\gamma_1 \sim \gamma_2$

H heißt **Homotopie** zwischen γ_1 und γ_2 .

Sei K ein Simplizialkomplex, $Z_n := \text{Kern}(d_n) \subseteq C_n$ und $B_n := \text{Bild}(d_{n+1}) \subseteq C_n$.

a) $H_n = H_n(K, \mathbb{R}) := Z_n / B_n$ heißt n -te **Homologiegruppe** von K .

b) $b_n(K) := \dim_{\mathbb{R}} H_n$ heißt n -te **Betti-Zahl** von K .

Sei X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$, $r : X \rightarrow A$ eine stetige Abbildung und $\iota = (\text{id}_X)|_A$.

- a) $\iota : A \rightarrow X$ mit $\iota(x) = x$ heißt die **Inklusionsabbildung** und man schreibt: $\iota : A \hookrightarrow X$.
- b) r heißt **Retraktion**, wenn $r|_A = \text{id}_A$ ist.
- c) A heißt **Deformationsretrakt**, wenn es eine Retraktion r auf A mit $\iota \circ r \sim \text{id}_X$ gibt.

Seien γ_1, γ_2 Wege in X mit $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Dann ist

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{falls } 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{falls } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

ein Weg in X . Er heißt **zusammengesetzter Weg** und man schreibt $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$.

Ein wegzusammenhängender topologischer Raum X heißt **einfach zusammenhängend**, wenn $\pi_1(X, x) = \{e\}$ für ein $x \in X$.

Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Sei außerdem

$$\pi_1(X, x) := \{ [\gamma] \mid \gamma \text{ ist Weg in } X \text{ mit } \gamma(0) = \gamma(1) = x \}$$

Durch $[\gamma_1] *_G [\gamma_2] := [\gamma_1 * \gamma_2]$ wird $\pi_1(X, x)$ zu einer Gruppe. Diese Gruppe heißt **Fundamentalgruppe** von X im Basispunkt x .

Es seien X, Y zusammenhängende topologische Räume und $p : Y \rightarrow X$ eine stetige Abbildung.

p heißt **Überlagerung**, wenn jedes $x \in X$ eine offene Umgebung $U = U(x) \subseteq X$ besitzt, sodass $p^{-1}(U)$ disjunkte Vereinigung von offenen Teilmengen $V_j \subseteq Y$ ist ($j \in I$) und $p|_{V_j} : V_j \rightarrow U$ ein Homöomorphismus ist.

Seien X, Y topologische Räume, $x_0 \in X, y_0 \in Y, f, g : X \rightarrow Y$ stetig mit $f(x_0) = y_0 = g(x_0)$.

f und g heißen **homotop** ($f \sim g$), wenn es eine stetige Abbildung $H : X \times I \rightarrow Y$ mit

$$H(x, 0) = f(x) \quad \forall x \in X$$

$$H(x, 1) = g(x) \quad \forall x \in X$$

$$H(x_0, s) = y_0 \quad \forall s \in I$$

gibt.

Abbildung, offene

diskret

Liftung

Überlagerung, universelle

Überlagerung, reguläre

Gruppenoperation

Gruppe operiert durch Homöomorphismen
Gruppenoperation, stetige

Geometrie
Gerade

Sei X ein topologischer Raum und $M \subseteq X$.
 M heißt **diskret** in X , wenn M in X keinen Häufungspunkt hat.

Seien $(X, \mathfrak{T}_X), (Y, \mathfrak{T}_Y)$ topologische Räume und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.
 f heißt **offen** : $\Leftrightarrow \forall U \in \mathfrak{T}_X : f(U) \in \mathfrak{T}_Y$.

Eine Überlagerung $p : \tilde{X} \rightarrow X$ heißt **universell**, wenn \tilde{X} einfach zusammenhängend ist.

Es seien X, Y, Z topologische Räume, $p : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung und $f : Z \rightarrow X$ stetig.
Eine stetige Abbildung $\tilde{f} : Z \rightarrow Y$ heißt **Liftung** von f , wenn $p \circ \tilde{f} = f$ ist.

Sei (G, \cdot) eine Gruppe und X eine Menge.
Eine **Gruppenoperation** von G auf X ist eine Abbildung $\circ : G \times X \rightarrow X$ für die gilt:
a) $1_G \circ x = x \quad \forall x \in X$
b) $(g \cdot h) \circ x = g \circ (h \circ x) \quad \forall g, h \in G \forall x \in X$

Es sei $p : Y \rightarrow X$ eine Überlagerung und $f : Y \rightarrow Y$ ein Homöomorphismus.

- a) f heißt **Decktransformation** von p : $\Leftrightarrow p \circ f = p$.
- b) p heißt **regulär**, wenn $|\text{Deck}(Y/X)| = \deg p$ gilt.

Das Tripel (X, d, G) heißt genau dann eine **Geometrie**, wenn (X, d) ein metrischer Raum und $\emptyset \neq G \subseteq \mathcal{P}(X)$ gilt. Dann heißt G die Menge aller **Geraden**.

Sei G eine Gruppe, X ein topologischer Raum und $\circ : G \times X \rightarrow X$ eine Gruppenoperation.

- a) G **operiert durch Homöomorphismen**, wenn für jedes $g \in G$ die Abbildung
$$m_g : X \rightarrow X, x \mapsto g \circ x$$
ein Homöomorphismus ist.
- b) Ist G eine topologische Gruppe, so heißt die Gruppenoperation \circ **stetig**, wenn
$$\forall g \in G : m_g \text{ ist stetig}$$
gilt.

**Ebene, euklidische
Inzidenzaxiome
Abstandsaxiom**

**kollinear
liegt zwischen
Strecke
Halbgerade**

**Anordnungsaxiome
Halbebene
Bewegungsaxiom
Parallele**

**Winkel
Innenwinkel
Außenwinkel**

Simplizialkomplexe, flächengleiche

Gerade, hyperbolische

Möbiustransformation

Doppelverhältnis

Sei (X, d, G) eine Geometrie und seien $P, Q, R \in X$.

- a) P, Q, R liegen **kollinear**, wenn es $g \in G$ gibt mit $\{P, Q, R\} \subseteq g$.
- b) Q liegt **zwischen** P und R , wenn $d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R)$
- c) **Strecke** $\overline{PR} := \{Q \in X \mid Q \text{ liegt zwischen } P \text{ und } R\}$
- d) **Halbgeraden**:
 $PR^+ := \{Q \in X \mid Q \text{ liegt zwischen } P \text{ und } R \text{ oder } R \text{ liegt zwischen } P \text{ und } Q\}$
 $PR^- := \{Q \in X \mid P \text{ liegt zwischen } Q \text{ und } R\}$

Eine **euklidische Ebene** ist eine Geometrie (X, d, G) , die Axiome §1 - §5 erfüllt:

- §1) **Inzidenzaxiome**:
 - (i) Zu $P \neq Q \in X$ gibt es genau ein $g \in G$ mit $\{P, Q\} \subseteq g$.
 - (ii) $|g| \geq 2 \quad \forall g \in G$
 - (iii) $X \notin G$
- §2) **Abstandsaxiom**: Zu $P, Q, R \in X$ gibt es genau dann zwischen P und R mit $\{P, Q, R\} \subseteq g$, wenn gilt:
 - $d(P, R) = d(P, Q) + d(Q, R)$ oder
 - $d(P, Q) = d(P, R) + d(R, Q)$ oder
 - $d(Q, R) = d(Q, P) + d(P, R)$

- a) Ein **Winkel** ist ein Punkt $P \in X$ zusammen mit 2 Halbgeraden mit Anfangspunkt P .
 Man schreibt: $\angle R_1 P R_2$ bzw. $\angle R_2 P R_1$ ^a
- b) Zwei Winkel sind **gleich**, wenn es eine Isometrie gibt, die den einen Winkel auf den anderen abbildet.
- c) $\angle R'_1 P' R'_2$ heißt **kleiner** als $\angle R_1 P R_2$, wenn es eine Isometrie φ gibt, mit $\varphi(P') = P$, $\varphi(P' R'_1) = P R_1^+$ und $\varphi(R'_2)$ liegt in der gleichen Halbebene bzgl. $P R_1$ wie R_2 und in der gleichen Halbebene bzgl. $P R_2$ wie R_1
- d) Im Dreieck $\triangle PQR$ gibt es **Innenwinkel** und **Außenwinkel**.

^aFür dieses Skript gilt: $\angle R_1 P R_2 = \angle R_2 P R_1$. Also sind insbesondere alle Winkel $\leq 180^\circ$.

§3) Anordnungsaxiome

- (i) Zu jeder Halbgerade H mit Anfangspunkt $P \in X$ und jedem $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt es genau ein $Q \in H$ mit $d(P, Q) = r$.
- (ii) Jede Gerade zerlegt $X \setminus g = H_1 \dot{\cup} H_2$ in zwei nichtleere Teilmengen H_1, H_2 , sodass für alle $A \in H_i, B \in H_j$ mit $i, j \in \{1, 2\}$ gilt: $\overline{AB} \cap g \neq \emptyset \Leftrightarrow i \neq j$.
 Diese Teilmengen H_i heißen **Halbebenen** bzgl. g .
- §4) **Bewegungsaxiom**: Zu $P, Q, P', Q' \in X$ mit $d(P, Q) = d(P', Q')$ gibt es mindestens 2 Isometrien φ_1, φ_2 mit $\varphi_i(P) = P'$ und $\varphi_i(Q) = Q'$ mit $i = 1, 2$.^a
- §5) **Parallelenaxiom**: Zu jeder Geraden $g \in G$ und jedem Punkt $P \in X \setminus g$ gibt es höchstens ein $h \in G$ mit $P \in h$ und $h \cap g = \emptyset$. h heißt **Parallele zu g durch P** .

^aDie „Verschiebung“ von $P'Q'$ nach PQ und die Isometrie, die zusätzlich an der Geraden durch P und Q spiegelt.

Sei

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$$

die obere Halbebene bzw. Poincaré-Halbebene und $G = G_1 \cup G_2$ mit

$$G_1 = \{g_1 \subseteq \mathbb{H} \mid \exists m \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{R}_{>0} : g_1 = \{z \in \mathbb{H} : |z - m| = r\}\}$$

$$G_2 = \{g_2 \subseteq \mathbb{H} \mid \exists x \in \mathbb{R} : g_2 = \{z \in \mathbb{H} : \Re(z) = x\}\}$$

Die Elemente aus G heißen **hyperbolische Geraden**.

„Simplizialkomplexe“ in euklidischer Ebene (X, d) heißen **flächengleich**, wenn sie sich in kongruente Dreiecke zerlegen lassen.

Seien $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden.
 Dann heißt

$$DV(z_1, z_2, z_3, z_4) := \frac{\frac{z_1 - z_4}{z_1 - z_2}}{\frac{z_3 - z_4}{z_3 - z_2}} = \frac{(z_1 - z_4) \cdot (z_3 - z_2)}{(z_1 - z_2) \cdot (z_3 - z_4)}$$

Doppelverhältnis von z_1, \dots, z_4 .

Es seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc \neq 0$ und $\sigma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung definiert durch

$$\sigma(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

σ heißt **Möbiustransformation**.

Metrik, hyperbolische

Kurve

parametrisiert, durch Bogenlänge
Kurve, Länge einer

Normalenvektor
Krümmung

Krümmung
Normalenvektor
Binormalenvektor
Dreibein, begreitendes

Tangentialebene

Normalenfeld
Fläche, orientierbare

Normalkrümmung

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion aus C^∞ . Dann heißt f **Kurve**.

Für $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ sei g_{z_1, z_2} die eindeutige hyperbolische Gerade durch z_1 und z_2 und a_1, a_2 die „Schnittpunkte“ von g_{z_1, z_2} mit $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Dann sei $d_{\mathbb{H}}(z_1, z_2) := \frac{1}{2} |\ln \text{DV}(a_1, z_1, a_2, z_2)|$ und heiße **hyperbolische Metrik**.

Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine durch Bogenlänge parametrisierte Kurve.

a) Für $t \in I$ sei $n(t)$ **Normalenvektor** an γ in t wenn gilt:

$$\langle n(t), \gamma'(t) \rangle = 0, \|n(t)\| = 1 \text{ und } \det((\gamma'_1(t), n(t))) = +1$$

b) Sei $\kappa : I \rightarrow \mathbb{R}$ so, dass gilt:

$$\gamma''(t) = \kappa(t) \cdot n(t)$$

Dann heißt $\kappa(t)$ **Krümmung** von γ in t .

Sei $\gamma : I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine C^∞ -Funktion.

a) Die Kurve γ heißt **durch Bogenlänge parametrisiert**, wenn gilt:

$$\|\gamma'(t)\|_2 = 1 \quad \forall t \in I$$

Dabei ist $\gamma'(t) = (\gamma'_1(t), \gamma'_2(t), \dots, \gamma'_n(t))$.

b) $l(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt$ heißt **Länge von γ** .

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $s \in S$, $F : U \rightarrow V \cap S$ eine lokale Parametrisierung um $s \in V$:

$$(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

Für $p = F^{-1}(s) \in U$ sei

$$J_F(p) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(p) & \frac{\partial x}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(p) & \frac{\partial y}{\partial v}(p) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(p) & \frac{\partial z}{\partial v}(p) \end{pmatrix}$$

und $D_p F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ die durch $J_F(p)$ definierte lineare Abbildung.

Dann heißt $T_s S := \text{Bild}(D_p F)$ die **Tangentialebene** an $s \in S$.

Sei $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine durch Bogenlänge parametrisierte Kurve.

a) Für $t \in I$ heißt $\kappa(t) := \|\gamma''(t)\|$ die **Krümmung** von γ in t .

b) Ist für $t \in I$ die Ableitung $\gamma''(t) \neq 0$, so heißt $\frac{\gamma''(t)}{\|\gamma''(t)\|}$

Normalenvektor an γ in t .

c) $b(t)$ sei ein Vektor, der $\gamma'(t), n(t)$ zu einer orientierten Orthonormalbasis von \mathbb{R}^3 ergänzt. Also gilt:

$$\det(\gamma'(t), n(t), b(t)) = 1$$

$b(t)$ heißt **Binormalenvektor**, die Orthonormalbasis

$$\{ \gamma'(t), n(t), b(t) \}$$

heißt **begleitendes Dreibein**.

In der Situation aus ?? heißt die Krümmung $\kappa_\gamma(0)$ der Kurve γ in der Ebene $(s + E)$ im Punkt s die **Normalkrümmung** von S in s in Richtung $x = \gamma'(0)$.

Man schreibt: $\kappa_\gamma(0) := \kappa_{\text{Nor}}(s, x)$

a) Ein **Normalenfeld** auf der Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$ ist eine Abbildung $n : S \rightarrow S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $n(s) \in T_s S^\perp$ für jedes $s \in S$.

b) S heißt **orientierbar**, wenn es ein stetiges Normalenfeld auf S gibt.

Normalkrümmung

**Hauptkrümmung
Gauß-Krümmung**

Fundamentalform, erste

Flächenelement

Fundamentalform, zweite

Sei S eine reguläre Fläche und $n = n(s)$ ein Normalenvektor an S in s .

a) $\kappa_1^n(s) := \min \{ \kappa_{\text{Nor}}^n(s, x) \mid x \in T_s^1 S \}$ und $\kappa_2^n(s) := \max \{ \kappa_{\text{Nor}}^n(s, x) \mid x \in T_s^1 S \}$

Hauptkrümmungen von S in s .

b) $K(s) := \kappa_1^n(s) \cdot \kappa_2^n(s)$ heißt **Gauß-Krümmung** von S in s .

Sei $S \subseteq \mathbb{R}^3$ eine reguläre Fläche, $s \in S$, (n ein stetiges Normalenfeld auf S)

$\gamma : [-\varepsilon, \varepsilon] \rightarrow S$ eine nach Bogenlänge parametrisierte Kurve ($\varepsilon > 0$) mit $\gamma(0) = s$ und $\gamma''(0) \neq 0$.

Sei $n(0) := \frac{\gamma''(0)}{\|\gamma''(0)\|}$. Zerlege

$$n(0) = n(0)^t + n(0)^\perp \text{ mit } n(0)^t \in T_s S \text{ und } n(0)^\perp \in (T_s S)^\perp$$

Dann ist $n(0)^\perp = \langle n(0), n(s) \rangle \cdot n(s)$

$\kappa_{\text{Nor}}(s, \gamma) := \langle \gamma''(0), n(s) \rangle$ die **Normalkrümmung**.

- a) Das Differential $dA = \sqrt{\det(I)} du_1 du_2$ heißt **Flächen-element** von S bzgl. der Parametrisierung F .
 b) Für eine Funktion $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

$$\int_V f dA := \int_U f(\underbrace{F(u_1, u_2)}_{=:s}) \sqrt{\det I(s)} du_1 du_2$$

der **Wert des Integrals** von f über V , falls das Integral rechts existiert.

Sei $I_S \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ definiert als

$$I_S := \begin{pmatrix} g_{1,1}(s) & g_{1,2}(s) \\ g_{1,2}(s) & g_{2,2}(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(s) & F(s) \\ F(s) & G(s) \end{pmatrix}$$

mit $g_{i,j} = g_s(D_p F(e_i), D_p F(e_j))$
 $= \langle \frac{\partial F}{\partial u_i}(p), \frac{\partial F}{\partial u_j}(p) \rangle \quad i, j \in \{1, 2\}$

Die Matrix I_S heißt **erste Fundamentalform** von S bzgl. der Parametrisierung F .

Die durch $-d_s n$ definierte symmetrische Bilinearform auf $T_s S$ heißt **zweite Fundamentalform** von S in s bzgl. F .
 Man schreibt: $II_s(x, y) = \langle -d_s n(x), y \rangle = I_s(-d_s n(x), y)$