

# Analysis I

Die Mitarbeiter von <http://mitschriebwiki.nomeata.de/> und GitHub-Beiträge

24. September 2012

# Inhaltsverzeichnis

<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>2</b>
<b>I. Vorwort</b>	<b>3</b>
I.1. Über dieses Skriptum . . . . .	3
I.2. Wer . . . . .	3
I.3. Wo . . . . .	3
<b>II. Eingeführte Begriffe</b>	<b>4</b>
II.1. Mengen . . . . .	4
II.2. Funktionen . . . . .	4
II.3. Logik . . . . .	4
<b>1. Reelle Zahlen</b>	<b>5</b>
<b>2. Natürliche Zahlen</b>	<b>9</b>
<b>3. Folgen, Abzählbarkeit</b>	<b>12</b>
<b>4. Wie Sie Wollen</b>	<b>14</b>
<b>5. Wurzeln und rationale Exponenten</b>	<b>16</b>
<b>6. Konvergente Folgen</b>	<b>18</b>
<b>7. Wichtige Beispiele</b>	<b>22</b>
<b>8. Häufungswerte und Teilfolgen</b>	<b>25</b>
<b>9. Oberer und unterer Limes</b>	<b>27</b>
<b>10. Das Cauchy-Kriterium</b>	<b>30</b>
<b>11. Unendliche Reihen</b>	<b>31</b>
<b>12. Konvergenzkriterien</b>	<b>34</b>
<b>13. Umordnungen und Produkte von Reihen</b>	<b>38</b>
<b>14. Potenzreihen</b>	<b>43</b>
<b>15. <math>p</math>-adische Entwicklungen</b>	<b>46</b>
<b>16. Grenzwerte bei Funktionen</b>	<b>49</b>
<b>17. Stetigkeit</b>	<b>53</b>

<b>18. Eigenschaften stetiger Funktionen</b>	<b>56</b>
<b>19. Funktionsfolgen und -reihen</b>	<b>60</b>
<b>20. Gleichmäßige Stetigkeit</b>	<b>63</b>
<b>21. Differenzierbarkeit</b>	<b>65</b>
<b>22. Höhere Ableitungen</b>	<b>73</b>
<b>23. Das Riemann-Integral</b>	<b>77</b>
<b>24. Uneigentliche Integrale</b>	<b>93</b>
<b>25. Funktionen von beschränkter Variation</b>	<b>95</b>
<b>26. Das Riemann-Stieltjes-Integral</b>	<b>97</b>
<b>A. Satz um Satz (hüpft der Has)</b>	<b>101</b>
<b>Stichwortverzeichnis</b>	<b>101</b>
<b>B. Credits für Analysis I</b>	<b>102</b>

# I. Vorwort

## I.1. Über dieses Skriptum

Dies ist ein erweiterter Mitschrieb der Vorlesung „Analysis I“ von Herrn Schmoeger im Wintersemester 04/05 an der Universität Karlsruhe (TH). Die Mitschriebe der Vorlesung werden mit ausdrücklicher Genehmigung von Herrn Schmoeger hier veröffentlicht, Herr Schmoeger ist für den Inhalt nicht verantwortlich.

## I.2. Wer

Gestartet wurde das Projekt von Joachim Breitner. Beteiligt am Mitschrieb sind ausser Joachim noch Manuel Holtgrewe, Wenzel Jakob, Pascal Maillard und Jonathan Picht.

## I.3. Wo

Alle Kapitel inklusive  $\text{\LaTeX}$ -Quellen können unter <http://mitschriebwiki.nomeata.de> abgerufen werden. Dort ist ein *Wiki* eingerichtet und von Joachim Breitner um die  $\text{\LaTeX}$ -Funktionen erweitert. Das heißt, jeder kann Fehler nachbessern und sich an der Entwicklung beteiligen. Auf Wunsch ist auch ein Zugang über *Subversion* möglich.

Inzwischen kann man auch über Git den Quelltext bekommen: <https://github.com/MartinThoma/LaTeX-examples/tree/master/documents/Analysis%20I>

## II. Eingeführte Begriffe

### II.1. Mengen

Durchschnitt, Vereinigung, Differenz, Leere Menge:  $\emptyset$ ,  $M \subseteq N$ ,  $M \subset N$ ,  $a \in M$ ,  $a \notin M$

### II.2. Funktionen

$M, N$  Mengen,  $M, N \neq \emptyset$ ;  $f : M \rightarrow N$

### II.3. Logik

- $\Rightarrow$  Implikation
- $\Leftrightarrow$  Äquivalenz
- $:=$  per Definition gleich
- $:\Leftrightarrow$  per Definiton äquivalent
- $\forall$  Abkürzung für „für jedes“, „für alle“
- $\exists$  Abkürzung für „es gibt“, „es existiert“

# 1. Reelle Zahlen

Die **Reellen Zahlen** sind eine Erfindung des menschlichen Geistes, sie haben von Natur aus keine Eigenschaften. Wie Schachfiguren haben sie nur eine Bedeutung im Rahmen der Regeln. Diese Regeln heißen hier Axiome, das sind Forderungen, die wir an etwas stellen, und aus denen wir dann weitere Erkenntnisse erlangen.

Die Grundmenge der Analysis ist  $\mathbb{R}$ , die Menge der reellen Zahlen: Diese Menge führen wir axiomatisch ein, durch die folgenden 15 Axiome.

In  $\mathbb{R}$  sind zwei Verknüpfungen „+“ und „·“ gegeben, die jedem Paar  $a, b \in \mathbb{R}$  genau ein  $a + b \in \mathbb{R}$  und genau ein  $ab := a \cdot b \in \mathbb{R}$  zuordnen.

## Axiom (Körperaxiome)

$$(A1) \quad a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$(A2) \quad a(bc) = (ab)c \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$(A3) \quad a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$(A4) \quad ab = ba \quad \forall a, b \in \mathbb{R}$$

$$(A5) \quad \exists 0 \in \mathbb{R} : a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$(A6) \quad \exists 1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$(A7) \quad \forall a \in \mathbb{R} \exists -a \in \mathbb{R} : a + (-a) = 0$$

$$(A8) \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists a^{-1} \in \mathbb{R} : aa^{-1} = 1$$

$$(A9) \quad a(b + c) = ab + ac \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}$$

Dabei nennt man **A1** und **A2** **Assoziativgesetze**, **A3** und **A4** **Kommutativgesetze** und **A9** **Distributivgesetz**,

Alle Regeln der Grundrechenarten lassen sich aus **(A1)** bis **(A9)** herleiten. Diese Regeln seien von nun an bekannt.

## Beispiele:

(1) **Behauptung:** Es gibt genau ein  $0 \in \mathbb{R}$  mit  $a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ .

**Beweis:** Die Existenz folgt direkt aus **(A5)**. Der Beweis der Eindeutigkeit: Es sei  $\tilde{0} \in \mathbb{R}$  mit  $a + \tilde{0} = a \quad \forall a \in \mathbb{R}$ . Daraus folgt  $0 + \tilde{0} = 0 \Rightarrow 0 = 0 + \tilde{0} = \tilde{0} + 0 = \tilde{0}$ , also  $0 = \tilde{0}$ .  
(Aufgabe: Beweise die Eindeutigkeit von  $1, -a, \dots$ )

(2) **Behauptung:**  $a \cdot 0 = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$

## 1. Reelle Zahlen

**Beweis:** Sei  $a \in \mathbb{R}$  und  $b := a \cdot 0$ . Dann  $b = a(0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 = b$ . Aus **(A7)** folgt dann  $0 = b + (-b) = (b + b) + (-b) = b + (b + (-b)) = b + 0 = b$ .

(3) **Behauptung:** Aus  $ab = 0$  folgt  $a = 0$  oder  $b = 0$ . *Beweis zur Übung*

**Schreibweisen:** Für  $a, b \in \mathbb{R}$ :  $a - b := a + (-b)$ ; ist  $b \neq 0$ :  $\frac{a}{b} := ab^{-1}$ .

### Axiom (Anordnungsaxiome)

In  $\mathbb{R}$  ist eine Relation „ $\leq$ “ gegeben. Es sollen gelten:

(A10) für  $a, b \in \mathbb{R}$  gilt  $a \leq b$  oder  $b \leq a$ .

(A11) aus  $a \leq b$  und  $b \leq a$  folgt  $a = b$ .

(A12) aus  $a \leq b$  und  $b \leq c$  folgt  $a \leq c$ .

(A13) aus  $a \leq b$  und  $c \in \mathbb{R}$  folgt  $a + c \leq b + c$ .

(A14) aus  $a \leq b$  und  $0 \leq c$  folgt  $ac \leq bc$ .

Alle Regeln für Ungleichungen lassen sich aus **(A1)** bis **(A14)** herleiten. Diese Regeln seien von nun an bekannt.

**Schreibweisen:** (1)  $a < b := a \leq b$  und  $a \neq b$

(2)  $a > b := b < a$

(3)  $a \geq b := b \leq a$

**Definition (Betrag)**  
Für  $a \in \mathbb{R}$  heißt  $|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$ .

$|a|$  wird der **Betrag** von  $a$  genannt und entspricht dem „Abstand“ von  $a$  und 0.  $|a - b|$  entspricht dem „Abstand“ von  $a$  und  $b$ .

### Satz 1.3 (Betragssätze)

(1)  $|a| \geq 0 \forall a \in \mathbb{R}; |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$

(2)  $|a - b| = |b - a| \forall a, b \in \mathbb{R}$

(3)  $|ab| = |a| \cdot |b| \forall a, b \in \mathbb{R}$

(4)  $\pm a \leq |a|$

(5)  $|a + b| \leq |a| + |b| \forall a, b \in \mathbb{R}$

(6)  $||a| - |b|| \leq |a - b| \forall a, b \in \mathbb{R}$

**Beweis**

- (5) Fall 1:  $a + b \geq 0 \Leftrightarrow |a + b| = a + b \leq |a| + |b|$   
 Fall 2:  $a + b < 0 \Leftrightarrow |a + b| = -(a + b) = -a + (-b) \leq |a| + |b|$

(6)  $|a| = |(a - b) + b| \leq |a - b| + |b| \Rightarrow |a| - |b| \leq |a - b|$ , analog  $|b| - |a| \leq |b - a| = |a - b|$ . ■

**Definition (Intervall)**

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ :

- (1)  $(a, b) := \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ : **offenes Intervall**  
 (2)  $[a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ : **abgeschlossenes Intervall**  
 (3)  $(a, b] := \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ : **halboffenes Intervall**  
 (4)  $[a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$

Entsprechend:  $[a, b), (-\infty, a], (a, \infty), (-\infty, a), (-\infty, \infty) := \mathbb{R}$ .

**Definition (Beschränkte Menge)**

Es sei  $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ .  $M$  heißt nach oben (*unten*) beschränkt genau dann, wenn es ein  $\gamma \in \mathbb{R}$ , so dass alle  $x \in M$  kleiner gleich (*größer gleich*)  $\gamma$  sind. In diesem Fall heißt  $\gamma$  **obere Schranke** (OS) (*untere Schranke* (US)) von  $M$ .

Ist  $\gamma$  eine OS (US) von  $M$  und gilt  $\gamma \leq \tilde{\gamma}$  ( $\gamma \geq \tilde{\gamma}$ ) für jede weitere OS (US)  $\tilde{\gamma}$  von  $M$ , so heißt  $\gamma$  das **Supremum** (*Infimum*) von  $M$  und man schreibt  $\gamma = \sup M$  ( $\gamma = \inf M$ ).

Ist  $\gamma = \sup M \in M$  ( $\gamma = \inf M \in M$ ), so heißt  $\gamma$  das **Maximum** (*Minimum*) von  $M$ :  $\gamma = \max M$  ( $\gamma = \min M$ ).

**Beispiele:**

- (1) aus  $M = (1, 2)$  folgt:  $2 = \sup M$ ,  $M$  hat kein Maximum  
 (2) aus  $M = (1, 2]$  folgt:  $2 = \sup M = \max M$   
 (3) aus  $M = [3, \infty)$  folgt:  $M$  ist nicht nach oben beschränkt,  $3 = \inf M$

**Axiom (Vollständigkeitsaxiom)**

**(A15)** Ist  $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$  und ist  $M$  nach oben beschränkt, so existiert  $\sup M$ .

**Anmerkung:**  $M = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 < 2\}$  hat kein Supremum in  $\mathbb{Q}$ , also sind die rationalen Zahlen keine Menge, die unsere Anforderungen an die reellen Zahlen erfüllt.

**Satz 1.5 (Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  bezüglich dem Infimum)**

Sei  $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$  und sei  $M$  nach unten beschränkt, dann existiert  $\inf M$

**Beweis**

Sei  $\tilde{M} := \{-x : x \in M\}$ . Sei  $\gamma$  eine untere Schranke von  $M$ , d.h.  $\gamma \leq x \forall x \in M \implies -x \leq -\gamma \forall x \in M \implies \tilde{M}$  ist nach oben beschränkt,  $-\gamma$  ist eine obere Schranke von  $\tilde{M}$ . **(A15)**  $\implies \exists s := \sup \tilde{M} \implies s \leq -\gamma$ .  $-x \leq s \forall x \in M \implies -s \leq x \forall x \in M \implies -s$  ist eine untere Schranke von  $M$ . Aus  $s \leq -\gamma \implies \gamma \leq -s$ , daher ist  $-s = \inf M$ . ■

**Satz 1.6 (Existenz des Supremum)**

Sei  $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ ,  $M$  sei nach oben beschränkt,  $\gamma$  sei eine obere Schranke von  $M$ .

$$\gamma = \sup M \iff \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : x > \gamma - \varepsilon$$

**Beweis**

„ $\implies$ “: Sei  $\gamma = \sup M$  und  $\varepsilon > 0 \implies \gamma - \varepsilon$  ist keine obere Schranke von  $M \implies \exists x \in M : x > \gamma - \varepsilon$ .

„ $\impliedby$ “: **(A15)**  $\implies \exists s = \sup M$ . Annahme:  $\gamma \neq s \implies s < \gamma \implies \varepsilon = \gamma - s > 0$ . Laut Voraussetzung gilt:  $\exists x \in M : x > \gamma - \varepsilon = \gamma - (\gamma - s) = s$ , Widerspruch zu  $x \leq s$ . ■

Analog gilt: Sei  $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ ,  $M$  sei nach unten beschränkt,  $\gamma$  sei eine untere Schranke von  $M$ .

$$\gamma = \inf M \iff \forall \varepsilon > 0 \exists x \in M : x < \gamma + \varepsilon$$

**Definition (Beschränktheit von Mengen)**

Sei  $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ .  $M$  heißt **beschränkt**:  $\iff M$  ist nach oben und nach unten beschränkt  $\iff \exists c > 0 : |x| \leq c \forall x \in M$ . *Beweis als Übung*

## 2. Natürliche Zahlen

### Definition (Induktionsmengen)

Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$ .  $M$  heißt eine **Induktionsmenge** ( $IM$ ):  $\iff$

- (1)  $1 \in M$
- (2) Aus  $x \in M$  folgt stets  $x + 1 \in M$

### Beispiel

$\mathbb{R}$ ,  $[1, \infty]$ , und  $\{1\} \cup [2, \infty]$  sind Induktionsmengen.

$J := \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ ist eine IM}\}$ ;  $\mathbb{N} := \bigcap_{A \in J} A$  heißt die Menge der **natürlichen Zahlen**.

### Satz 2.1 (Induktionsmengen)

- (1)  $\mathbb{N} \in J$
- (2)  $\mathbb{N} \subseteq A \forall A \in J$
- (3)  $\mathbb{N}$  ist *nicht* nach oben beschränkt.
- (4)  $\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n > x$
- (5) *Prinzip der vollständigen Induktion*: Ist  $A \subseteq \mathbb{N}$  und  $A \in J \implies A = \mathbb{N}$

### Beweis

- (1)  $1 \in A \forall A \in J \implies x + 1 \in A \forall x \in A \forall A \in J \implies x + 1 \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{N}$
- (2) folgt aus der Definition von  $\mathbb{N}$
- (3) Annahme:  $\mathbb{N}$  ist nach oben beschränkt. **(A15)**:  $s := \sup \mathbb{N}$ . 1.3  $\implies \exists n \in \mathbb{N} : n > s - 1$ ;  
**(1)**  $\implies n + 1 \in \mathbb{N} \implies n + 1 > s$ ; Widerspruch
- (4) folgt aus (3)
- (5)  $A \overset{\text{Vor.}}{\subseteq} \mathbb{N} \overset{(2)}{\subseteq} A \implies A = \mathbb{N}$  ■

### Satz 2.2 (Beweisverfahren durch vollständige Induktion)

Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei eine Aussage  $A(n)$  gemacht. Es gelte: (I)  $A(1)$  ist wahr und (II) aus  $n \in \mathbb{N}$  und  $A(n)$  wahr folgt stets  $A(n + 1)$  ist wahr.

**Behauptung:**  $A(n)$  ist wahr für **jedes**  $n \in \mathbb{N}$ .

**Beweis**

$A := \{n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ ist wahr}\}$ . Dann:  $A \subseteq \mathbb{N}$ , aus (I) und (II) folgt  $A \in J$ . ■

**Beispiele:**

- (1)  $A(n) := n \geq 1$ .  $A(n) \forall n \in \mathbb{N}$ . Beweis (induktiv):  
 Induktionsanfang (IA):  $1 \geq 1$ , also ist  $A(1)$  wahr.  
 Induktionsvoraussetzung (IV): Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $A(n)$  wahr (also  $n \geq 1$ )  
 Induktionsschritt (IS,  $n \rightsquigarrow n + 1$ ):  $n + 1 \stackrel{(IV)}{\geq} 1 + 1 \geq 1$ , also  $A(n + 1)$  wahr.
- (2) Für  $n \in \mathbb{N}$  sei  $A_n := (\mathbb{N} \cap [1, n]) \cup [n + 1, \infty)$ .  
 Behauptung:  $\underbrace{A_n \text{ ist eine Induktionsmenge}}_{A(n)} \forall n \in \mathbb{N}$
- (3) Sei  $n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$  und  $n < x < n + 1$ . Behauptung:  $x \notin \mathbb{N}$ . Beweis: Annahme:  $x \in \mathbb{N}$ . Sei  $A_m$  wie im oberen Beispiel (2)  $\implies A_m \in J \implies \mathbb{N} \subseteq A_m \implies x \in A_m \implies x \leq m$  oder  $x \geq m + 1$ , Widerspruch!
- (4) Behauptung:  $\underbrace{1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}}_{A(n)} \forall n \in \mathbb{N}$

**Beweis:** (induktiv)

IA:  $\frac{1+1}{2} = 1 \implies A(1)$  ist wahr.

IV: Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .

IS: ( $n \rightsquigarrow n + 1$ )

$$1 + 2 + \dots + n + (n + 1) \stackrel{(IV)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1)(IV) = (n + 1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \implies A(n+1) \text{ ist wahr}$$

**Definition (Summen- und Produktzeichen)**

- (1) Seien  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ .

$$\sum_{k=1}^n a_k := a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$$\prod_{k=1}^n a_k := a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$$

- (2)  $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  
 $\mathbb{Z} := \mathbb{N}_0 \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$  (ganze Zahlen),  
 $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$  (rationale Zahlen).

**Satz 2.3 (Ganze Zahlen)**

Sei  $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$ .

- (1) Ist  $M \subseteq \mathbb{N}$ , so existiert  $\min M$
- (2) Ist  $M \subseteq \mathbb{Z}$  nach oben beschränkt, so existiert  $\max M$ ; ist  $M \subseteq \mathbb{Z}$  nach unten beschränkt, so existiert  $\min M$ .

(3) Ist  $a \in \mathbb{R}$ , so existiert genau ein  $k \in \mathbb{Z} : k \leq a < k + 1$ . Bezeichnung:  $[a] := k$ .

**Beweis**

(1)  $1 \leq n \forall n \in M \implies M$  ist nach unten beschränkt. 1.2  $\implies \exists \alpha = \inf M$  mit  $\alpha + 1$  ist keine untere Schranke von  $M$ .  $\implies \exists m \in M : m < \alpha + 1$ . Sei  $n \in M$ . Annahme:  $n < m \implies n < m < \alpha + 1 \leq n + 1 \implies n < m < n + 1$ . Da  $n \in \mathbb{N}$ : Widerspruch.

(2) Zur Übung

(3)  $M := \{z \in \mathbb{Z} : z \leq a\}$ . Annahme:  $M = \emptyset \implies z > a \forall z \in \mathbb{Z} \implies -n > a \forall n \in \mathbb{N} \implies n < -a \forall n \in \mathbb{N}$ . Widerspruch zu 2.1(3); also:  $M \neq \emptyset$ . (2)  $\implies \exists k := \max M$ . ■

**Satz 2.4 (Zwischen zwei reellen Zahlen liegt stets eine rationale)**

Sind  $x, y \in \mathbb{R}$  und  $x < y$ , so existiert ein  $r \in \mathbb{Q} : x < r < y$ .

**Beweis**

$$y - x > 0 \text{ 2.1(4)} \implies \exists n \in \mathbb{N} : n > \frac{1}{y - x} \implies \frac{1}{n} < y - x \implies x + \frac{1}{n} < y$$

$$m := [nx] \in \mathbb{Z} \implies m < nx < m + 1 \implies \frac{m}{n} \leq x < \frac{m + 1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \leq x + \frac{1}{n} \implies x < \overset{:=r}{\frac{m + 1}{n}} < y$$

### 3. Folgen, Abzählbarkeit

#### Definition (Eigenschaften von Funktionen)

Seien  $A, B$  nichtleere Mengen und  $f : A \rightarrow B$  eine Funktion.  $f(A) := \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$  heißt Bildmenge von  $f$ .

$f$  heißt **surjektiv** :  $\iff f(A) = B$

$f$  heißt **injektiv** :  $\iff$  aus  $x_1, x_2 \in A$  und  $f(x_1) = f(x_2)$  folgt stets  $x_1 = x_2$

$f$  heißt **bijektiv** :  $\iff f$  ist injektiv und surjektiv

#### Definition (Folgen)

Eine Funktion  $a : \mathbb{N} \rightarrow B$  heißt eine *Folge in  $B$* . Schreibweisen:  $a_n$  statt  $a(n)$  (mit  $n \in \mathbb{N}$ ) ist das  $n$ -te Folgenglied.  $(a_n)$  oder  $(a_n)_{n=1}^\infty$  oder  $(a_1, a_2, \dots)$  statt  $a$ . Ist  $B = \mathbb{R}$ , so heißt  $(a_n)$  eine *reelle Folge*.

#### Beispiele:

(1)  $a_n := \frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $(a_n) = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$

(2)  $a_{2n} := 0, a_{2n-1} := 1$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $(a_n) = (1, 0, 1, 0, 1, \dots)$ .

#### Definition (Endlich, unendlich, abzählbar, überabzählbar)

Sei  $B$  eine nichtleere Menge.

(1)  $B$  heißt **endlich** :  $\iff \exists n \in \mathbb{N}$  und eine surjektive Funktion  $f : \{1, \dots, n\} \rightarrow B$ , also  $B = \{f(1), \dots, f(n)\}$ .

(2)  $B$  heißt **unendlich** :  $\iff B$  ist nicht endlich.

(3)  $B$  heißt **abzählbar** :  $\iff \exists (a_n) \in B : B = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  ( $\iff \exists a : \mathbb{N} \rightarrow B$  mit  $a$  surjektiv).

„Die Elemente von  $B$  können mit natürlichen Zahlen durchnummeriert werden.“

Beachte: Endliche Mengen sind abzählbar!

(4)  $B$  heißt **überabzählbar** :  $\iff B$  ist nicht abzählbar.

#### Beispiele:

(1)  $\mathbb{N}$  ist abzählbar, denn  $\mathbb{N} = \{a_1, a_2, \dots\}$  mit  $a_n := n$  ( $n \in \mathbb{N}$ )

(2)  $\mathbb{Z}$  ist abzählbar, denn  $\mathbb{Z} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  mit  $a_1 := 0, a_{2n} := n, a_{2n+1} := -n$

(3)  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} := \{(n, m) : n, m \in \mathbb{N}\}$  ist abzählbar.

**Beweis:** Sei  $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  mit  $g(n, m) := n + \frac{1}{2}(n + m - 1)(n + m - 2)$ .  $g$  ist bijektiv (*Übung!*), dann ist  $g^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  ebenfalls bijektiv.

(4)  $\mathbb{Q}$  ist abzählbar

**Beweis:**  $\mathbb{Q}^+ := \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$ ,  $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}^+$  mit  $f(n, m) := \frac{n}{m}$ ,  $f$  ist surjektiv.  $b_n := f(g^{-1}(n))$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Dann:  $\mathbb{Q}^+ = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$ .  $a_1 := 0, a_{2n} := b_n, a_{2n+1} := -b_n \implies \mathbb{Q} = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$

### 3. Folgen, Abzählbarkeit

(5) Sei  $B$  die Menge der Folgen in  $\{0, 1\}$ . Also  $(a_n) \in B \iff a_n \in \{0, 1\} \forall n \in \mathbb{N}$ .  $B$  ist überabzählbar.

**Beweis:** Annahme:  $B$  ist abzählbar, also  $B = \{f_1, f_2, f_3, \dots\}$  mit  $f_j = (a_{j1}, a_{j2}, a_{j3}, \dots)$

und  $a_{jk} \in \{0, 1\}$ . Setze  $a_n := \begin{cases} 1, & \text{falls } a_{nn} = 0 \\ 0, & \text{falls } a_{nn} = 1 \end{cases}$ . Es ist  $(a_n) \in B$ .

$\exists m \in \mathbb{N} : (a_n) = f_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots) = (a_1, a_2, \dots) \implies a_n = a_{mn} \forall n \in \mathbb{N} \implies a_m = a_{mm}$ , Widerspruch!

#### Satz

(1) Sei  $\emptyset \neq B \subseteq A$  und  $A$  sei abzählbar. Dann ist  $B$  abzählbar.

(2) Seien  $B_1, B_2, B_3, \dots$  abzählbar viele Mengen und jedes  $B_j$  sei abzählbar.  $\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j$  ist abzählbar.

#### Beweis

(1)  $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ , sei  $b \in B$  fest gewählt.

$$b_n := \begin{cases} a_n & \text{falls } a_n \in B \\ b & \text{falls } a_n \notin B \end{cases}$$

Also  $C := \{b_1, b_2, \dots\} \subseteq B$ .  $\forall x \in B \implies x \in A \implies \exists m \in \mathbb{N} : x = a_m \implies a_m \in B \implies b_m = a_m \implies x = b_m \implies x \in C \implies B \subseteq C \implies B = C$ .

(2) *Siehe Übungsblatt 2* ■

## 4. Wie Sie Wollen

### Definition (Potenz, Fakultät, Binominalkoeffizienten)

(1) Für  $a \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $a^n := a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a$  ( $n$  Faktoren) und heißt die  $n$ -te Potenz von  $a$

$$a^0 := 1$$

Für  $a \neq 0$  gilt:  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

(2) Für  $n \in \mathbb{N}$  gilt  $n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$  und heißt die **Fakultät** von  $n$ ,  $0! := 1$ .

(3) Für  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$  und  $k \leq n$  gilt  $\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$  („n über k“)

### Satz 4.1 (Eigenschaften von Binomialkoeffizienten)

(1)  $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(2) Für  $n, k \in \mathbb{N}, k \leq n$  gilt  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$

(3) Für  $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$  gilt  $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + b^n) = (a - b) \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k$

### Satz 4.2 (Folgerung)

Für  $b = 1$  und  $x = a$  liefert 4.1 (3):

Für  $x \in \mathbb{R}$  und  $n \in \mathbb{N}$  gilt:

$$\sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \begin{cases} n + 1 & \text{falls } x = 1 \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{falls } x \neq 1 \end{cases}$$

### Satz 4.3 (Bernoullische Ungleichung (BU))

Ist  $x \geq -1$ , so gilt:  $(1+x)^n \geq 1+nx \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

### Beweis

$n = 1$ :  $1+x \geq 1+x \quad \checkmark$

$n \Rightarrow n + 1$ :

$$\begin{aligned}
 (1+x)^n &\geq 1+nx && \text{(IV)} \\
 (1+x)(1+x)^n &\geq (1+nx)(1+x) \\
 (1+x)^{n+1} &\geq 1+nx+x+\underbrace{nx^2}_{\geq 0} \geq 1+nx+x = 1+(n+1)x \\
 \Rightarrow (1+x)^{n+1} &\geq 1+(n+1)x. && \blacksquare
 \end{aligned}$$

**Satz 4.4 (Der binomische Satz)**

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

**Beispiel**

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

**Beweis**

$$n = 1: \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b = a + b \quad \checkmark$$

$n \rightarrow n + 1$ :

$$\begin{aligned}
 &(a+b)^{n+1} \\
 &= (a+b)(a+b)^n \\
 &= (a+b) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k && \text{(IV)} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\
 &= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} + \binom{n}{n} b^{n+1} \\
 &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n-(k-1)} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\
 &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} && \text{(4.1 (2))} \\
 &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k.
 \end{aligned}$$

# 5. Wurzeln und rationale Exponenten

## Hilfssatz 5.1

- (1) Sind  $x, y \in \mathbb{R}, x, y \geq 0$  und  $n \in \mathbb{N}$ , so gilt:  $x \leq y \Leftrightarrow x^n \leq y^n$
- (2) Ist  $\beta > 0 \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : \frac{1}{m} < \beta$

## Beweis

- (1) „ $\Rightarrow$ “ (induktiv)  
 I.A.  $n = 1$   
 I.V. Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $x^n \leq y^n$   
 I.S.  $x^{n+1} = x^n x \leq y^n x \leq y^n y = y^{n+1}$   
 „ $\Leftarrow$ “: Annahme:  $y < x \xrightarrow{\text{wie oben}} y^k < x^k \forall k \in \mathbb{N}$ , Wid.
- (2) 2.1(4)  $\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : m > \frac{1}{\beta} \Rightarrow \frac{1}{m} < \beta$ . ■

## Definition 5.2 (Wurzeln)

Sei  $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$  und  $n \in \mathbb{N}$ . Dann existiert genau ein  $x \in \mathbb{R}$  mit:  $x \geq 0$  und  $x^n = a$ . Dieses  $x$  heißt die  $n$ -te **Wurzel** aus  $a$  und wird mit  $\sqrt[n]{a}$  bezeichnet ( $\sqrt{a} := \sqrt[2]{a}$ ).

- Bemerkung:** (1)  $\sqrt[n]{a} \geq 0$  (Beispiel:  $\sqrt[4]{4} = 2, \sqrt[4]{4} \neq -2$ ; die Gleichung  $x^2 = 4$  hat zwei Lösungen)
- (2)  $\sqrt{b^2} = |b| \forall b \in \mathbb{R}$

## Beweis

**Eindeutigkeit:** Sei  $x, y \geq 0$  und  $x^n = a = y^n \xrightarrow{5.1(1)} x = y$

**Existenz:** O.B.d.A.:  $a > 0$  und  $n \geq 2$

$M := \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0, y^n < a\}, M \neq \emptyset$ , denn  $0 \in M$

Sei  $y \in M \Rightarrow y^n < a < 1 + na \stackrel{\text{BU}}{\leq} (1+a)^n \xrightarrow{5.1(1)} y < 1+a$ .  $M$  ist nach oben beschränkt.

(A15)  $\Rightarrow \exists x := \sup M$ . Wir zeigen:  $x^n = a$

Annahme:  $x^n < a$ . Sei  $m \in \mathbb{N}$ :

$$\left(x + \frac{1}{m}\right)^n \stackrel{4.4}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \frac{1}{m^k} = x^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k} \underbrace{\frac{1}{m^k}}_{\leq \frac{1}{m}} \leq x^n + \frac{1}{m} \underbrace{\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^{n-k}}_{\alpha}$$

$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{m}\right)^n \leq x^n + \frac{\alpha}{m}$ . 4.1(2)  $\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : \frac{1}{m} < \frac{a-x^n}{\alpha} \Rightarrow x^2 + \frac{\alpha}{m} < a$ . Dann  $\left(x + \frac{1}{m}\right)^n \leq x^n + \frac{\alpha}{m} < a \Rightarrow x + \frac{1}{m} \in M \Rightarrow x + \frac{1}{m} \leq x \Rightarrow \frac{1}{m} < 0$ . Widerspruch  $\Rightarrow x^n \geq a$

Annahme:  $x^n > a$ .  $\left(x - \frac{1}{m}\right)^n = \left(x\left(1 - \frac{1}{mx}\right)\right)^n = x^n \left(1 - \frac{1}{mx}\right)^n \stackrel{\text{BU}}{\geq} x^n \left(1 - \frac{n}{mx}\right)$  falls  $-\frac{1}{mx} \geq -1$ , also falls  $\frac{1}{m} \leq x$ . Also:  $\left(x - \frac{1}{m}\right)^n \geq x^n \left(1 - \frac{n}{mx}\right)$  für  $m \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{m} \leq x$ . [Nebenrechnung:  $x^n \left(1 - \frac{n}{mx}\right) > a \Leftrightarrow \frac{1}{m} < \frac{x(x^n - a)}{nx^n} =: \alpha$ ] 5.1(2)  $\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$  mit  $\frac{1}{m} \leq x$  und  $\frac{1}{m} \leq \alpha$ .

Dann  $(x - \frac{1}{m})^n > a$ .  $x - \frac{1}{m}$  ist keine obere Schranke von  $M \implies \exists y \in M : y > x - \frac{1}{m} \xrightarrow{5.1(1)} y^n > (x - \frac{1}{m})^n > a$ . Also  $y^n > a$ . Widerspruch, denn  $y \in M$ .  
 Daraus folgt:  $x^n = a$ . ■

**Satz 5.3 (Eindeutigkeit von rationalen Potenzen)**

Sei  $a \geq 0$ ,  $m, n, p, q \in \mathbb{N}$  und es sei  $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ . Dann  $(\sqrt[n]{a})^m = (\sqrt[q]{a})^p$ .

**Beweis**

$x := (\sqrt[n]{a})^m$ ,  $y := (\sqrt[q]{a})^p$ . Wegen 5.1(1) genügt es zu zeigen:  $x^q = y^n$ . Es ist  $m q = n p$ .  
 $x^q = (\sqrt[n]{a})^{mq} = \sqrt[n]{a^{mq}} = \sqrt[n]{a^{np}} = a^p = \sqrt[q]{a^{pq}} = y^n$  ■

**Definition (Rationale Potenzen)**

(1) Sei  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a \geq 0$  und  $r \in \mathbb{Q}^+ = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0\}$ . Dann existiert  $m, n \in \mathbb{N} : r = \frac{m}{n}$ . Es sei  $a^r := \sqrt[n]{a^m}$ . (Wegen 5.3 ist  $a^r$  wohldefiniert).

(2) Sei  $a > 0$ ,  $r \in \mathbb{Q}$  und  $r < 0$ .  $a^r = \frac{1}{a^{-r}}$

Es gelten die Rechenregeln ( $a^{r+s} = a^r a^s, \dots$ ) als bekannt.

## 6. Konvergente Folgen

### Definition (Umgebung)

Sei  $a \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$ :  $U_\varepsilon(a) : \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$  heißt  $\varepsilon$ -**Umgebung** von  $a$ .

$$x \in U_\varepsilon(a) \iff -\varepsilon < x - a < \varepsilon \iff a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \iff x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

Also gilt:  $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$

### Definition („für fast alle“)

Für jedes  $n \in \mathbb{N}$  sei eine Aussage  $A(n)$  gemacht.  $A(n)$  gilt **für fast alle** (ffa)  $n \in \mathbb{N} \iff \exists m \in \mathbb{N}$  so dass  $A(n)$  wahr ist für alle  $n \geq m$ . Ein Beispiel ist  $n^2 \geq n + 17$  gilt ffa  $n \in \mathbb{N}$ .

**Vereinbarung:** Alle vorkommenden Folgen seien Folgen in  $\mathbb{R}$ .

### Definition (Beschränkte Folgen)

$(a_n)$  heißt beschränkt (*nach oben beschränkt*)/(*nach unten beschränkt*) :  $\iff \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$  ist beschränkt (*nach oben beschränkt*)/(*nach unten beschränkt*).

Ist  $(a_n)$  nach oben beschränkt, so setze

$$\sup_{n=1}^{\infty} a_n := \sup_{n \in \mathbb{N}} a_n := \sup_{n \geq 1} a_n := \sup \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

Ist  $(a_n)$  nach unten beschränkt, so setze

$$\inf_{n=1}^{\infty} a_n := \inf_{n \in \mathbb{N}} a_n := \inf_{n \geq 1} a_n := \inf \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

**Beachte:**  $(a_n)$  ist beschränkt  $\iff \exists c > 0 : |a_n| \leq c \forall n \in \mathbb{N}$ .

### Definition (Konvergente Folge)

Sei  $(a_n)$  eine Folge.  $(a_n)$  heißt **konvergent** :  $\iff \exists a \in \mathbb{R}$ , so dass es für *jedes*  $\varepsilon > 0$  ein  $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  gibt, so dass  $|a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq n_0$  gilt. In diesem Fall heißt  $a$  der **Grenzwert** (GW) oder **Limes** von  $(a_n)$  und man schreibt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n) = a$  oder  $\lim a_n = a$  oder  $a_n \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ) oder  $a_n \rightarrow a$ . Ist  $(a_n)$  nicht konvergent, so heißt  $(a_n)$  **divergent**.

$$\begin{aligned} \text{Also: } a_n \rightarrow a \ (n \rightarrow \infty) &\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq n_0 \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : a_n \in U_\varepsilon(a) \forall n \geq n_0 \\ &\iff \forall \varepsilon > 0 \text{ gilt: } a_n \in U_\varepsilon(a) \text{ ffa } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

### Satz 6.1 (Grenzwert und Beschränktheit konvergenter Folgen)

$(a_n)$  sei konvergent.

- (1) Dann ist der Grenzwert von  $(a_n)$  eindeutig bestimmt.
- (2)  $(a_n)$  ist beschränkt.

**Beweis**

(1) Es gelte  $a_n \rightarrow a$  und  $a_n \rightarrow b$ .

**Annahme:**  $a \neq b$ , etwa  $a < b$ .

$\varepsilon := \frac{b-a}{2} > 0$ . Dann  $U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b) = \emptyset$  (\*)

$a_n \rightarrow a \implies a_n \in U_\varepsilon(a)$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \rightarrow b \implies a_n \in U_\varepsilon(b)$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies a_n \in U_\varepsilon(a) \cap U_\varepsilon(b)$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ . Widerspruch zu (\*), also  $a = b$ .

(2) Sei  $a := \lim(a_n)$ . Zu  $\varepsilon = 1$  existiert ein  $n \in \mathbb{N} : |a_n - a| < 1 \forall n \geq n_0$ . Dann:  $|a_n| = |a_n - a + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a| =: c_1 \forall n \geq n_0$ .  $c_2 := \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_{n_0-1}|\}$ ,  $c := \max\{c_1, c_2\}$ . Dann:  $|a_n| \leq c \forall n \in \mathbb{N}$ . ■

**Bemerkung (Endlich viele Elemente sind egal):** Sind  $(a_n)$  und  $(b_n)$  Folgen und gilt  $a_n = b_n$  ffa  $a \in \mathbb{N}$ , so gilt  $(a_n)$  konvergent  $\iff (b_n)$  konvergent. Im Konvergenzfall:  $\lim(a_n) = \lim(b_n)$ .

**Beispiele:**

(1) Sei  $c \in \mathbb{R}$  und  $a_n = c$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ . Dann:  $|a_n - c| = 0$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ , d.h.  $\lim a_n = c$ .

(2)  $a_n = \frac{1}{n}$ . Behauptung:  $a_n \rightarrow 0$  (**Nullfolge**). Beweis: Sei  $\varepsilon > 0$ . 2.1(4)  $\implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \implies \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ . Für  $n \geq n_0 : |a_n - 0| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ .

(3)  $a_n = n$ . 2.1(3)  $\implies \mathbb{N}$  ist nicht beschränkt.  $\xrightarrow{6.2(2)}$   $(a_n)$  ist divergent.

(4)  $a_n = (-1)^n$ , also  $(a_n) = (-1, 1, -1, \dots)$   $|a_n| = 1 \forall n \in \mathbb{N} \implies a_n$  ist beschränkt. Annahme:  $(a_n)$  ist konvergent. Sei  $a := \lim a_n$ .  $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \frac{1}{2} \forall n \geq n_0$ . Dann:  $2 = |a_{n_0} - a_{n_0+1}| = |a_{n_0} - a + a - a_{n_0+1}| \leq |a_{n_0} - a| + |a_{n_0+1} - a| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  Widerspruch! Also:  $(a_n)$  ist divergent.

(5)  $a_n = \frac{n^2}{n^2+1}$ . Behauptung:  $a_n \rightarrow 1$ .  $|a_n - 1| = \left| \frac{n^2}{1+n^2} - \frac{n^2+1}{n^2+1} \right| = \frac{1}{1+n^2} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Bsp(2)  $\implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : \frac{1}{n_0} < \varepsilon \forall n \geq n_0 \implies |a_n - 1| < \varepsilon \forall n \geq n_0$ .

(6)  $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ .  $a_n = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ . D.h.  $|a_n - 0| = a_n \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . 2.1(4)  $\implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{1}{\varepsilon^2} \implies \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon$ . Sei  $n \geq n_0 : |a_n - 0| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon$ . D.h.  $a_n \rightarrow 0$ .

**Bemerkung:** Sei  $p \in \mathbb{Z}$  fest. Eine Funktion  $a : \{p, p+1, p+2, \dots\} \rightarrow \mathbb{R}$  heißt ebenfalls Folge in  $\mathbb{R}$ . Schreibweise:  $a = (a_n)_{n \geq p} = (a_n)_{n=p}^\infty$ . Beispiele:  $(a_n)_{n=0}^\infty$ ,  $(a_n)_{n=-1}^\infty = (a_{-1}, a_0, a_1, \dots)$

**Satz 6.2 (Konvergenzsätze)**

$(a_n), (b_n), (c_n)$  seien Folgen in  $\mathbb{R}$ .

(1)  $a_n \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ )  $\iff |a_n - a| \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ )

(2) Sei  $a \in \mathbb{R}$  und es gelte  $|a_n - a| \leq b_n$  ffa  $n \in \mathbb{N}$  und  $b_n \rightarrow 0$ . Dann:  $a_n \rightarrow a$ .

(3) Es gelte  $a_n \rightarrow a$ ,  $b_n \rightarrow b$ .

(i) gilt  $a_n \leq b_n$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies a \leq b$

(ii) gilt  $a = b$  und  $a_n \leq c_n \leq b_n$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies c_n \rightarrow a$ .

- (iii)  $|a_n| \rightarrow |a|$
- (iv)  $a_n + b_n \rightarrow a + b$
- (v)  $\alpha a_n \rightarrow \alpha a \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- (vi)  $a_n \cdot b_n \rightarrow a \cdot b$
- (vii) Ist  $b \neq 0$ , so existiert ein  $m \in \mathbb{N}$ :  $b_n \neq 0 \quad \forall n \geq m$  und die Folge  $(\frac{1}{b_n})_{n \geq m}$  konvergiert gegen  $\frac{1}{b}$

**Beweis**

- (1) folgt aus der Definition der Konvergenz
- (2)  $\exists m \in \mathbb{N}$ :  $|a_n - a| \leq b_n \quad \forall n > m$ . Sei  $\varepsilon > 0$ .  $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ :  $b_n \leq \varepsilon \quad \forall n > n_1$ .  $m_0 := \max\{m, n_1\}$ .  
Dann:  $|a_n - a| \leq b_n < \varepsilon \quad \forall n \geq m_0$ .
- (3)
- (i) Annahme:  $b < a$ .  $\varepsilon := \frac{a-b}{2}$ .  $a_n \rightarrow a \implies a_n \in U_\varepsilon(a) \quad \text{ffa } n \in \mathbb{N} \implies a_n > a - \varepsilon$   
 $\text{ffa } n \in \mathbb{N}$ .  $b_n \rightarrow b \implies b_n \in U_\varepsilon(b) \quad \text{ffa } n \in \mathbb{N} \implies b_n < b + \varepsilon \quad \text{ffa } n \in \mathbb{N} \implies$   
 $b_n < b + \varepsilon = a - \varepsilon < a_n \quad \text{ffa } n \in \mathbb{N}$ . Widerspruch zur Voraussetzung  $\implies a_n < b_n$   
 $\text{ffa } n \in \mathbb{N}$ .
- (ii) Sei  $\varepsilon > 0$ .  $a_n \rightarrow a, b_n \rightarrow a \implies a - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < a + \varepsilon \quad \text{ffa } n \in \mathbb{N} \implies c_n \in$   
 $U_\varepsilon(a) \quad \text{ffa } n \in \mathbb{N}$ .
- (iii)  $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| \implies |a_n| \rightarrow |a|$
- (iv) Zur Übung
- (v) Zur Übung
- (vi)  $|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n| |b_n - b| + |b| |a_n - a|$ .  
6.1(2)  $\implies \exists c > 0 : |a_n| \leq c \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies |a_n b_n - ab| \leq c \cdot |b_n - b| + |b| |a_n - a| =: \alpha_n$ .  
**(iv), (v)**  $\implies \alpha_n \rightarrow 0 \xrightarrow{(2)} a_n b_n \rightarrow ab$ .
- (vii) (iii)  $\implies |b_n| \rightarrow b \implies |b| > 0$ .  $\varepsilon := \frac{|b|}{2}$ ;  $|b_n| \rightarrow |b| \implies |b_n| \in U_\varepsilon(|b|) \quad \text{ffa } n \in$   
 $\mathbb{N} \implies |b_n| > |b| - \varepsilon = \frac{|b|}{2} \quad \text{ffa } n \in \mathbb{N}$ :  $b_n \neq 0 \quad \forall n > m$ . Für  $n > m$ :  $|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| =$   
 $|\frac{b-b_n}{b_n \cdot b}| = \frac{|b-b_n|}{|b_n| |b|} \leq \frac{2}{|b|^2} |b_n - b| =: \beta_n$ .  $\beta_n \rightarrow 0 \xrightarrow{(2)} \frac{1}{b_n} \rightarrow \frac{1}{b}$ . ■

**Beispiel**

$$a_n = \frac{n^2 + 3n + 5}{n^2 - 3n + 8} = \frac{1 + \frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}{1 - \frac{3}{n} + \frac{8}{n^2}} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)$$

**Definition (Monotonie)**

- $(a_n)$  heißt **monoton wachsend** :  $\iff a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- $(a_n)$  heißt **streng monoton wachsend** :  $\iff a_{n+1} > a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

- $(a_n)$  heißt **monoton fallend** :  $\iff a_{n+1} \leq a_n \forall n \in \mathbb{N}$
- $(a_n)$  heißt **streng monoton fallend** :  $\iff a_{n+1} < a_n \forall n \in \mathbb{N}$
- $(a_n)$  heißt **monoton** :  $\iff (a_n)$  ist monoton wachsend oder fallend.
- $(a_n)$  heißt **streng monoton** :  $\iff (a_n)$  ist streng monoton wachsend oder fallend.

**Satz 6.3 (Monotoniekriterium)**

$(a_n)$  sei monoton wachsend (*fallend*) und sei nach oben (*unten*) beschränkt. Dann ist  $(a_n)$  konvergent.  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup_{n=1}^{\infty} a_n$  ( $\inf_{n=1}^{\infty} a_n$ ).

**Beweis**

$a := \sup_{n=1}^{\infty} a_n = \sup\{a_1, a_2, \dots\}$ .  $a - \varepsilon$  ist keine obere Schranke von  $\{a_1, a_2, \dots\} \implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > a - \varepsilon$ . Für  $n > n_0$ :  $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq a < a + \varepsilon \implies |a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq n_0$ . ■

**Beispiel**

$$\begin{aligned} a_1 &:= \sqrt[3]{6}, a_{n+1} := \sqrt[3]{6 + a_n} \quad (n \in \mathbb{N}) \\ a_2 &:= \sqrt[3]{6 + a_1} > \sqrt[3]{6} = a_1 \quad (\text{wegen Satz 5.1 (1)}) \\ a_3 &:= \sqrt[3]{6 + a_2} > \sqrt[3]{6 + a_1} = a_2 \end{aligned}$$

**Behauptung:**  $a_{n+1} > a_n \forall n \in \mathbb{N}$

**Beweis**

$n = 1$ : s.o.

$$n \longrightarrow n + 1: a_{n+2} = \sqrt[3]{6 + a_{n+1}} \stackrel{\text{IV}}{>} \sqrt[3]{6 + a_n} = a_{n+1}. \quad \blacksquare$$

Also:  $(a_n)$  ist streng monoton wachsend.

$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt[3]{6} < 2 \\ a_2 &= \sqrt[3]{6 + a_1} < \sqrt[3]{8} = 2 \end{aligned}$$

**Behauptung:**  $a_n < 2 \forall n \in \mathbb{N}$

**Beweis**

$n = 1$ : s.o.

$$n \longrightarrow n + 1: a_{n+1} = \sqrt[3]{6 + a_n} \stackrel{\text{IV}}{<} \sqrt[3]{6 + 2} = 2. \quad \blacksquare$$

Also:  $(a_n)$  ist nach oben beschränkt. Aus 6.3 folgt:  $(a_n)$  ist konvergent.

$$\begin{aligned} a &:= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \\ a_{n+1} &= \sqrt[3]{6 + a_n} \implies a_{n+1}^3 = 6 + a_n \implies a^3 = 6 + a \\ \implies 0 &= a^3 - a - 6 = (a - 2)(a^2 + 2a + 3) = (a - 2) \underbrace{((a + 1)^2 + 2)}_{>0} \implies a = 2 \end{aligned}$$

## 7. Wichtige Beispiele

### Satz 7.1 (Konvergenzsatz für Wurzeln)

Sei  $(a_n)$  eine konvergente Folge,  $a_n \geq 0$ . Es sei  $a := \lim a_n$  ( $\xrightarrow{6.2} a \geq 0$ ) und  $p \geq 2$ . Dann:  
 $\sqrt[p]{a_n} \rightarrow \sqrt[p]{a}$ .

### Beweis

**Fall 1:**  $a = 0$  Sei  $\varepsilon > 0$ .  $a_n \rightarrow 0 \implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n < \varepsilon^p \forall n > n_0 \xrightarrow{5.1} \sqrt[p]{a_n} < \varepsilon \forall n \geq n_0$   
 $\implies |\sqrt[p]{a_n} - 0| = \sqrt[p]{a_n} < \varepsilon \forall n \geq n_0 \implies \sqrt[p]{a_n} \rightarrow 0$

**Fall 2:**  $a > 0$   $|a_n - a| = |(\underbrace{\sqrt[p]{a_n}}_{=:x})^p - (\underbrace{\sqrt[p]{a}}_{=:y})^p| = |x^p - y^p| \stackrel{4.2}{=} |x-y| \cdot |x^{p-1} + x^{p-2}y + \dots + xy^{p-2} + y^{p-1}|$   
 $\geq |x-y| \cdot \underbrace{|y^p - 1|}_{=:c} = |x-y| \cdot c = |\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}| \cdot c \implies |\sqrt[p]{a_n} - \sqrt[p]{a}| \leq \underbrace{\frac{1}{c}|a_n - a|}_{\rightarrow 0} \implies \sqrt[p]{a_n} \rightarrow \sqrt[p]{a} \blacksquare$

### Beispiel 7.2

Sei  $x \in \mathbb{N}$  und  $a_n := x^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

Fall 1:  $x = 0 \implies (a_n)$  ist konvergent und  $a_n \rightarrow 0$

Fall 2:  $x = 1 \implies (a_n)$  ist konvergent und  $a_n \rightarrow 1$

Fall 3:  $x = -1 \implies (a_n)$  ist divergent.

Fall 4:  $|x| > 1: \exists \delta > 0 : |x| = 1 + \delta \implies |a_n| = |x^n| = |x|^n = (1 + \delta)^n \geq 1 + n\delta \geq n\delta \implies a_n$  ist nicht beschränkt. 6.1(2)  $\implies (a_n)$  ist divergent.

Fall 5:  $0 < |x| < 1$ : Dann  $\frac{1}{|x|} > 1 \implies \exists \eta > 0 : \frac{1}{|x|} = 1 + \eta \implies \frac{1}{|a_n|} = \frac{1}{|x^n|} = \left(\frac{1}{|x|}\right)^n = (1 + \eta)^n \geq 1 + n\eta \geq n\eta \implies |a_n| \leq \frac{1}{n\eta} \forall n \in \mathbb{N} \implies a_n \rightarrow 0$

### Beispiel 7.3

Sei  $x \in \mathbb{R}$  und  $s_n := 1 + x + x^2 + \dots + x^n = \sum_{k=0}^n x^k$

$$\S 4 \implies s_n = \begin{cases} n + 1 & \text{falls } x = 1 \\ \frac{1-x^{n+1}}{1-x} & \text{falls } x \neq 1 \end{cases}$$

7.2  $\implies (s_n)$  ist konvergent  $\iff |x| < 1$ . In diesem Fall:  $s_n \rightarrow \frac{1}{1-x}$  ( $n \rightarrow \infty$ )

**Satz 7.4 (Satz über  $\sqrt[n]{n}$ )**Es gilt:  $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$  ( $n \rightarrow \infty$ )**Beweis**

$a_n := \sqrt[n]{n} - 1 \implies a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$ . Zu zeigen ist:  $a_n \rightarrow 0$ . Für  $n \geq 2$ :  $\sqrt[n]{n} = 1 + a_n \implies n = (1 + a_n)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_n^k \geq \binom{n}{2} a_n^2 = \frac{1}{2}(n)(n-1)a_n^2 \implies a_n^2 \leq \frac{2}{n-1} \forall n \geq 2 \implies \underbrace{0}_{\rightarrow 0} < a_n < \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n-1}}}_{\rightarrow 0} \implies a_n \rightarrow 0$  ■

**Beispiel 7.5 (Konvergenz von Wurzeln)**Sei  $c > 0$ . Dann:  $\sqrt[n]{c} \rightarrow 1$  ( $n \rightarrow \infty$ ).**Beweis**Fall 1:  $c \geq 1 \exists m \in \mathbb{N} : m \geq c \implies 1 \leq c \leq n \forall n \geq m \implies \sqrt[n]{n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{c}}_{\rightarrow 1} \xrightarrow{7.4} \sqrt[n]{c} \rightarrow 1$ Fall 2:  $c < 1 \implies \frac{1}{c} > 1 \xrightarrow{\text{Fall 1}} \underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{c}}}_{=\frac{1}{\sqrt[n]{c}}} \rightarrow 1 \xrightarrow{6.2(\text{vii})} \sqrt[n]{c} \rightarrow 1$  ■**Satz 7.6 (Satz und Definition von  $e$ )**

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n \in \mathbb{N}); \quad b_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}_0)$$

 $(a_n)$  und  $(b_n)$  sind konvergent und es gilt  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ .**Definition:**  $e := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  heißt eulersche Zahl. ( $2 < e < 3$ ,  $e \approx 2,718$ )**Beweis**In der großen Übung wurde gezeigt:  $a \leq a_n < a_{n+1} < 3 \forall n \in \mathbb{N}$ . 6.3  $\implies (a_n)$  ist konvergent,  $a := \lim a_n$ . $b_{n+1} = b_n + \frac{1}{(n+1)!} > b_n \implies (b_n)$  ist monoton wachsend.

$$b_n = 1 + 1 + \underbrace{\frac{1}{2}}_{\leq \frac{1}{2^1}} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 3}}_{< \frac{1}{2^2}} + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4}}_{< \frac{1}{2^3}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n}}_{< \frac{1}{2^{n-1}}}$$

$$< 1 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) = 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 3$$

 $\implies (b_n)$  ist nach oben beschränkt. 6.3  $\implies (b_n)$  ist konvergent,  $b := \lim b_n$

## 7. Wichtige Beispiele

Zu zeigen:  $a = b$ .

Für  $n \geq 2$ :

$$\begin{aligned}
 a_n &= \left(a + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
 &= 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{<1} \quad (*) \\
 &< 1 + 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} = b_n
 \end{aligned}$$

Also:  $a_n < b_n \forall n \geq 2 \implies a \leq b$ .

Sei  $j \in \mathbb{N}, j \geq 2$  (fest) und  $n > j$ . Aus (\*) folgt:

$$\begin{aligned}
 a_n &\geq 1 + 1 + \sum_{k=2}^j \frac{1}{k!} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)}_{\rightarrow 1(n \rightarrow \infty)} = c_n^{(j)} \\
 \implies c_n^{(j)} &\rightarrow 1 + 1 + \sum_{k=2}^j \frac{1}{k!} = b_j \quad (n \rightarrow \infty) \\
 \implies a_n &\geq c_n^{(j)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \geq b_j.
 \end{aligned}$$

Also:  $b_j \leq a \forall j \geq 2 \xrightarrow{j \rightarrow \infty} b \leq a$ . ■

## 8. Häufungswerte und Teilfolgen

**Erinnerung:**  $a_n \rightarrow a \iff \forall \varepsilon > 0$  gilt:  $a_n \in U_\varepsilon(a)$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ .

### Definition (Häufungswerte)

$(a_n)$  sei eine Folge und  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  $\alpha$  heißt ein **Häufungswert** (HW) von  $(a_n)$ :  $\iff \forall \varepsilon > 0$  gilt:  $a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$ .  $H(a_n) := \{\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \text{ ist ein Häufungswert von } (a_n)\}$ .

### Beispiele:

- (1)  $a_n = (-1)^n$ .  $a_{2n} = 1, a_{2n-1} = -1$ . Sei  $\varepsilon > 0$ :  $a_{2n} \in U_\varepsilon(1) \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \in U_\varepsilon(1)$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow 1 \in H(a_n)$ . Analog:  $a_n \in U_\varepsilon(-1)$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow -1 \in \mathcal{H}(a_n)$ . Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $1 \neq \alpha \neq -1$ . Wähle  $\varepsilon > 0$  so, dass  $1, -1 \notin U_\varepsilon(\alpha) \Rightarrow a_n \notin U_\varepsilon(\alpha) \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha \notin \mathcal{H}(a_n)$ . Fazit:  $\mathcal{H}(a_n) = \{1; -1\}$ .
- (2)  $a_n = n$ . Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$ .  $\exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \alpha + \varepsilon \Rightarrow n > \alpha + \varepsilon \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n \notin U_\varepsilon(\alpha) \forall n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$  für höchstens endlich viele  $n \in \mathbb{N}$ .  $\Rightarrow \alpha \notin \mathcal{H}(a_n)$ . Fazit:  $\mathcal{H}(a_n) = \emptyset$ .
- (3)  $\mathbb{Q}$  ist abzählbar. Also:  $\mathbb{Q} = \{a_1, a_2, \dots\}$ .  
Behauptung:  $\mathcal{H}(a_n) = \mathbb{R}$ .  
Beweis: Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $\varepsilon > 0$ .  $\alpha_n := \alpha + \frac{\varepsilon}{n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $\alpha_n \in U_\varepsilon(\alpha) \forall n \in \mathbb{N}$ .  
2.4  $\Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : \alpha_2 < r < \alpha_1$  (dann:  $r \in U_\varepsilon(\alpha)$ );  $\exists n_1 \in \mathbb{N} : r = a_{n_1}$ .  
Also:  $a_{n_1} \in U_\varepsilon(\alpha)$ . 2.4  $\Rightarrow \exists n_2 \in \mathbb{N} : \alpha_3 < a_{n_2} < \alpha_2$ . Dann:  $n_2 \neq n_1$ . 2.4  $\Rightarrow \exists n_3 \in \mathbb{N} : \alpha_4 < a_{n_3} < \alpha_3$  und  $n_3 \neq n_2, n_3 \neq n_1$ . Etc.  
Wir erhalten so eine Folge von Indices  $(n_1, n_2, n_3, \dots)$  in  $\mathbb{N}$  mit  $a_{n_k} \in U_\varepsilon(\alpha)$  und  $n_k \neq n_j$  für  $k \neq j$ .  
 $\Rightarrow a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha \in \mathcal{H}(a_n)$ .

### Definition (Teilfolge)

Sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  und  $(n_1, n_2, \dots)$  sei eine Folge in  $\mathbb{N}$  mit:  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ . Dann heißt  $(a_{n_k}) = (a_{n_1}, a_{n_2}, \dots)$  eine **Teilfolge** (TF) von  $(a_n)$ .

### Beispiele:

- (1)  $n_k = 2k$ :  $(a_2, a_4, a_6, \dots)$  ist eine Teilfolge von  $(a_n)$ .
- (2)  $n_k = 2k - 1$ :  $(a_1, a_3, a_5, \dots)$  ist eine Teilfolge von  $(a_n)$ .
- (3)  $n_k = k^2$ :  $(a_1, a_4, a_9, \dots)$  ist eine Teilfolge von  $(a_n)$ .
- (4)  $(a_1, a_3, a_2, a_4, a_5, a_7, \dots)$  ist *keine* Teilfolge.

### Satz 8.1 (Sätze zu Teilfolgen)

- (1) Sei  $(a_n)$  eine Folge und  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann:  $\alpha \in \mathcal{H}(a_n) \iff$  Es existiert eine TF  $(a_{n_k})$  von  $(a_n)$  mit:  $a_{n_k} \rightarrow \alpha$  ( $k \rightarrow \infty$ )

- (2) Ist  $\alpha \in \mathbb{R}$ , so existiert eine Folge  $(r_k)$  in  $\mathbb{Q}$ :  $r_k \rightarrow \alpha$  ( $k \rightarrow \infty$ )
- (3) Ist  $(a_n)$  konvergent und  $a := \lim a_n \implies \mathcal{H}(a_n) = \{a\}$ . Ist  $(a_{n_k})$  eine Teilfolge von  $(a_n)$ , so ist  $(a_{n_k})$  konvergent und  $a_{n_k} \rightarrow a$  ( $k \rightarrow \infty$ )

**Beweis**

- (1) „ $\implies$ “: Sei  $\alpha \in \mathcal{H}(a_n)$ . Zu  $\varepsilon = 1$  existiert  $n_1 \in \mathbb{N}$ :  $a_{n_1} \in U_1(\alpha)$ .  
 Zu  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  existiert  $n_2 \in \mathbb{N}$ :  $a_{n_2} \in U_{\frac{1}{2}}(\alpha)$  und  $n_2 > n_1$   
 Zu  $\varepsilon = \frac{1}{3}$  existiert  $n_3 \in \mathbb{N}$ :  $a_{n_3} \in U_{\frac{1}{3}}(\alpha)$  und  $n_3 > n_2$ . etc  
 Wir erhalten so eine Teilfolge von  $(a_{n_k})$  von  $(a_n)$  mit  $a_{n_k} \in U_{\frac{1}{k}}(\alpha) \forall k \in \mathbb{N}$ , also:  $|a_{n_k} - \alpha| < \frac{1}{k} \forall k \in \mathbb{N} \implies a_{n_k} \rightarrow \alpha$  ( $k \rightarrow \infty$ ).  
 „ $\impliedby$ “: Sei  $(a_{n_k})$  eine Teilfolge von  $(a_n)$  und  $a_{n_k} \rightarrow \alpha$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Sei  $\varepsilon > 0 \implies \exists k_0 \in \mathbb{N}$ :  
 $a_{n_k} \in U_\varepsilon(\alpha) \forall k > k_0 \implies a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N} \implies \alpha \in \mathcal{H}(a_n)$
- (2) Sei  $\mathbb{Q} = \{a_1, a_2, \dots\}$ . Bekannt:  $H(a_n) = \mathbb{R}$ . Also:  $\alpha \in \mathcal{H}(a_n) \stackrel{(1)}{\implies}$  Behauptung.
- (3) Klar:  $a \in \mathcal{H}(a_n)$   
 Sei  $(a_{n_k})$  eine Teilfolge von  $(a_n)$  und  $\varepsilon > 0$ .  $a = \lim a_n \implies a_n \in U_\varepsilon(a) \text{ ffa } n \in \mathbb{N} \implies a_{n_k} \in U_\varepsilon(a) \text{ ffa } k \in \mathbb{N} \implies a_{n_k} \rightarrow a$  ( $k \rightarrow \infty$ ). Aus (1) folgt noch  $H(a_n) = a$ . ■

**Hilfssatz (Monotone Teilfolge)**

Sei  $(a_n)$  eine Folge. Dann enthält  $(a_n)$  eine *monotone* Teilfolge.

**Beweis**

$m \in \mathbb{N}$  heißt *niedrig* (für  $(a_n)$ ) :  $\iff a_n \geq a_m \forall n \geq m$ .

**Fall 1:** Es existieren unendlich viele niedrige Indices  $n_1, n_2, n_3, \dots$  etwa:  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$  (s. 2.3!). Sei  $k \in \mathbb{N}$ :  $n_k$  ist niedrig.  $n_{k+1} > n_k \implies a_{n_{k+1}} \geq a_{n_k} \implies$  die Teilfolge  $(a_{n_k})$  ist monoton wachsend.

**Fall 2:** Es gibt höchstens endlich viele niedrige Indices  $\implies \exists m \in \mathbb{N}$ :  $m, m+1, m+2, \dots$  sind alle nicht niedrig  $\implies n_3 > n_2 : a_{n_3} < a_{n_2}$  etc.  
 Wir erhalten so eine monotone Teilfolge  $(a_{n_k})$ . ■

**Satz 8.2 (Satz von Bolzano-Weierstraß)**

$(a_n)$  sei eine beschränkte Folge. Dann  $H(a_n) \neq \emptyset$ .

**Beweis**

$\exists c > 0 : |a_n| \leq c \forall n \in \mathbb{N}$ . Hilfssatz  $\implies (a_n)$  enthält eine monotone Teilfolge  $(a_{n_k})$ .  $|a_{n_k}| \leq c \forall k \in \mathbb{N}$ .  $(a_{n_k})$  ist aber schränkt. 6.3  $\implies (a_{n_k})$  ist konvergent.  $\alpha := \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k}$ . 8.1(1)  $\implies \alpha \in \mathcal{H}(a_n)$ . ■

# 9. Oberer und unterer Limes

**Vereinbarung:** In diesem Paragraphen sei  $(a_n)$  stets eine *beschränkte* Folge in  $\mathbb{R}$ . 8.2  $\implies \mathcal{H}(a_n) \neq \emptyset$ .

**Satz 9.1 (Beschränktheit und Abgeschlossenheit der Häufungswerte)**  
 $\mathcal{H}(a_n)$  ist beschränkt. Weiter existieren  $\max \mathcal{H}(a_n)$  und  $\min \mathcal{H}(a_n)$

**Beweis**

$\exists c > 0 : |a_n| \leq c \forall n \in \mathbb{N}$ . Sei  $\alpha \in \mathcal{H}(a_n)$ . 8.1  $\implies \exists \text{TF}(a_{n_k})$  von  $(a_n)$  mit  $a_{n_k} \rightarrow \alpha (k \rightarrow \infty)$ , 6.2  $\implies |a_{n_k}| \rightarrow |\alpha| (k \rightarrow \infty); |a_{n_k}| \leq c \forall k \in \mathbb{N} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} |\alpha| \leq c$ . Also:  $|\alpha| \leq c \forall \alpha \in \mathcal{H}(a_n)$ .  $\mathcal{H}(a_n)$  ist also beschränkt. Sei  $s := \sup \mathcal{H}(a_n)$ , z.Z.:  $s \in \mathcal{H}(a_n)$  (analog zeigt man:  $\inf \mathcal{H}(a_n) \in \mathcal{H}(a_n)$ )

Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann ist  $s - \varepsilon$  keine obere Schranke von  $\mathcal{H}(a_n) \implies \exists \alpha \in \mathcal{H}(a_n) : \alpha > s - \varepsilon$ .

Wähle  $\delta > 0$  so, dass  $U_\delta(\alpha) \subseteq U_\varepsilon(s) \implies a_n \in U_\delta(\alpha)$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N} \implies a_n \in U_\varepsilon(s)$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N} \implies s \in \mathcal{H}(a_n)$ . ■

**Definition**

$\limsup a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup a_n := \max \mathcal{H}(a_n)$  heißt **oberer Limes** oder **Limes superior** von  $(a_n)$

$\liminf a_n := \lim_{n \rightarrow \infty} \inf a_n := \min \mathcal{H}(a_n)$  heißt **unterer Limes** oder **Limes inferior** von  $(a_n)$

**Beachte:**  $\liminf a_n \leq \alpha \leq \limsup a_n \forall \alpha \in \mathcal{H}(a_n)$ .

**Beispiele:**

(1) Ist  $(a_n)$  konvergent  $\xrightarrow{8.1} \mathcal{H}(a_n) = \{\lim a_n\} \implies \limsup a_n = \liminf a_n = \lim a_n$ .

(2)  $a_n = (-1)^n(1 + \frac{1}{n})^n; |a_n| = (1 + \frac{1}{n})^n \stackrel{7.6}{\leq} 3 \implies (a_n)$  ist beschränkt.

$a_{2n} = (1 + \frac{1}{2n})^{2n} \implies (a_{2n})$  ist eine Teilfolge von  $(a_n)$  und von der Folge  $((1 + \frac{1}{n})^n) \xrightarrow{8.1} e$   $a_{2n} \rightarrow e (n \rightarrow \infty)$ . Analog:  $a_{2n-1} = -(1 + \frac{1}{2n-1})^{2n-1} \rightarrow -e$ . Also:  $e, -e \in \mathcal{H}(a_n)$ . Sei  $\alpha \in \mathbb{R} : e \neq \alpha \neq -e$ .

Wähle  $\varepsilon > 0$  so, dass:  $\underbrace{(U_\varepsilon(e) \cup U_\varepsilon(-e))}_{=:U} \cap U_\varepsilon(\alpha) \neq \emptyset (*)$

Etwa  $\varepsilon := \frac{1}{2} \min\{|\alpha - e|, |\alpha + e|\}$ .  $a_{2n} \rightarrow e \implies a_n \in U_\varepsilon(e)$  ffa gerade  $n$ .  $a_{2n-1} \rightarrow -e \implies a_n \in U_\varepsilon(-e)$  ffa ungerade  $n$ .  $\implies a_n \in U$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$  für höchstens endlich viele  $n \in \mathbb{N} \implies \alpha \notin \mathcal{H}(a_n)$ . Fazit:  $\mathcal{H}(a_n) = \{e, -e\}$ ,  $\limsup a_n = e$ ,  $\liminf a_n = -e$ .

**Satz 9.2 (Eigenschaften des Limes superior und inferior)**Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Dann: $\alpha = \liminf a_n \iff \forall \varepsilon > 0$  gilt:

- (1)  $\alpha - \varepsilon < a_n$  ffa  $n \in \mathbb{N}$
- (2)  $a_n < \alpha + \varepsilon$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$ .

 $\alpha = \limsup a_n \iff \forall \varepsilon > 0$  gilt:

- (1)  $\alpha - \varepsilon < a_n$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$
- (2)  $a_n < \alpha + \varepsilon$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ .

**Beweis**nur für  $\liminf$ .

„ $\implies$ “: Sei  $\alpha = \liminf a_n$ . Sei  $\varepsilon > 0$ .  $\alpha \in \mathcal{H}(a_n) \implies a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N} \implies$  (ii).

**Annahme:** (i) gilt nicht. D.h.:  $a_n \leq \alpha - \varepsilon$  für unendlich viele  $n$ , etwa für  $n_1, n_2, n_3, \dots$  mit  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ . Dann ist  $a_{n_k}$  eine Teilfolge von  $(a_n)$  mit  $a_{n_k} \leq \alpha - \varepsilon \forall k \in \mathbb{N}$ .  $a_{n_k}$  ist beschränkt.

$\xrightarrow{8.2} (a_{n_k})$  enthält eine konvergente Teilfolge  $(a_{n_{k_j}})$ ;  $\beta := \lim_{j \rightarrow \infty} a_{n_{k_j}}$ .  $(a_{n_{k_j}})$  ist auch eine Teilfolge

von  $(a_n) \xrightarrow{8.1} \beta \in \mathcal{H}(a_n) \implies \alpha \leq \beta$ .  $a_{n_{k_j}} \leq \alpha - \varepsilon \forall j \in \mathbb{N} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \beta \leq \alpha - \varepsilon \implies \alpha \leq \alpha - \varepsilon$ , Widerspruch!

„ $\Leftarrow$ “: für jedes  $\varepsilon > 0$  gelte (i) und (ii). Sei  $\varepsilon > 0 \xrightarrow{(i),(ii)} \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$  für unendlich viele  $n \implies a_n \in U_\varepsilon(\alpha)$  für unendlich viele  $n \implies \alpha \in \mathcal{H}(a_n)$ . Sei  $\beta < \alpha$ . Zu zeigen:  $\beta \notin \mathcal{H}(a_n)$ .  $\varepsilon := \frac{\alpha - \beta}{2} \implies \beta + \varepsilon = \alpha - \varepsilon$ . (i)  $\implies a_n > \alpha - \varepsilon = \beta + \varepsilon$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies a_n \in U_\varepsilon(\beta)$  für höchstens endlich viele  $n \implies \beta \notin \mathcal{H}(a_n)$ . ■

**Satz 9.3 (Äquivalenzaussagen zur Konvergenz)**

Die folgende Aussagen sind äquivalent:

- (1)  $\liminf a_n = \limsup a_n$
- (2)  $(a_n)$  hat genau einen Häufungswert
- (3)  $(a_n)$  ist konvergent

**Beweis**(1) (1)  $\iff$  (2) Klar.(2) (3)  $\implies$  (2) 8.1.

- (3) (2)  $\implies$  (3) Sei  $\mathcal{H}(a_n) = \{\alpha\} \implies \limsup a_n = \liminf a_n = \alpha$ .  
 Sei  $\varepsilon > 0 \xrightarrow{9.2} \alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies |a_n - \alpha| < \varepsilon$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies a_n \rightarrow \alpha$  ( $n \rightarrow \infty$ ). ■

**Folgerung 9.4**

Sei  $(b_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ .  $(b_n)$  ist konvergent genau dann, wenn  $(b_n)$  beschränkt ist und genau einen Häufungswert hat. **Beweis** „ $\implies$ “: 6.1, 9.3; „ $\Leftarrow$ “: 9.3

**Beispiel**

auf die Voraussetzung „ $(b_n)$  beschränkt“ kann in 9.4 nicht verzichtet werden!

**Beispiel:**  $(b_n) = (1, 0, 3, 0, 5, 0, \dots)$

**Satz 9.5 (Rechenregeln für den Limes superior und inferior)**

Sei  $(b_n)$  eine weitere beschränkte Folge in  $\mathbb{R}$ .

- (1) aus  $a_n \leq b_n$  ffa  $n \in \mathbb{N}$  folgt  $\limsup a_n \leq \limsup b_n$   
 aus  $a_n \leq b_n$  ffa  $n \in \mathbb{N}$  folgt  $\liminf a_n \leq \liminf b_n$
- (2)  $\limsup(a_n + b_n) \leq \limsup a_n + \limsup b_n$   
 $\liminf(a_n + b_n) \geq \liminf a_n + \liminf b_n$
- (3)  $\limsup(\alpha a_n) = \alpha \limsup a_n \quad \forall \alpha \geq 0$   
 $\liminf(\alpha a_n) = \alpha \liminf a_n \quad \forall \alpha \geq 0$
- (4)  $\limsup(-a_n) = -\liminf a_n$   
 $\liminf(-a_n) = -\limsup a_n$

**Beweis:** Übung

# 10. Das Cauchy-Kriterium

**Motivation:** Sei  $(a_n)$  eine konvergente Folge,  $a := \lim a_n$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert ein  $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ :  $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \forall n \geq n_0$ .

Für  $n, m \geq n_0$ :  $|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon$ .

Eine konvergente Folge  $(a_n)$  hat also die folgende Eigenschaft:

$$(*) \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon$$

## Definition (Cauchy-Folge)

Hat  $(a_n)$  die Eigenschaft (\*), so heißt  $(a_n)$  eine **Cauchyfolge** (CF). **Beachte:**  $(a_n)$  ist eine Cauchyfolge  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon \forall n > m \geq n_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_{n+p}| < \varepsilon \forall n \geq n_0 \forall p \in \mathbb{N}$ .

## Beispiel

$$s_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$s_{2n} - s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} - (1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}) = \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \underbrace{\frac{1}{n+2}}_{\geq \frac{1}{2n}} + \dots + \underbrace{\frac{1}{2n}}_{\geq \frac{1}{2n}} \geq$$

$$n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \implies |s_{2n} - s_n| \geq \frac{1}{2} \forall n \in \mathbb{N} \implies (s_n) \text{ ist keine Cauchyfolge!}$$

## Satz 10.1 (Cauchy-Kriterium)

$(a_n)$  ist konvergent  $\iff (a_n)$  ist eine Cauchyfolge.

## Beweis

„ $\implies$ “: siehe oben

„ $\impliedby$ “: Zu  $\varepsilon = 1$  existiert  $n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_{n_0}| < 1 \forall n \geq n_0$ . Für  $n \geq n_0 : |a_n| = |a_n - a_{n_0} + a_{n_0}| \leq |a_n - a_{n_0}| + |a_{n_0}| < 1 + |a_{n_0}| =: c \implies (a_n)$  ist beschränkt.

Annahme:  $(a_n)$  ist divergent  $\xrightarrow{9.3} \alpha := \liminf a_n < \limsup a_n =: \beta$

$$\varepsilon := \frac{\beta - \alpha}{3}; \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a_{n_0}| < \varepsilon \forall n, m \geq n_0$$

$$\alpha \in H(a_n) \implies \exists n \in \mathbb{N} : a_n \in U_\varepsilon(\alpha) \text{ und } n \geq n_0 \implies a_n < \alpha + \varepsilon$$

$$\beta \in H(a_n) \implies \exists m \in \mathbb{N} : a_m \in U_\varepsilon(\beta) \text{ und } m \geq n_0 \implies a_m < \beta - \varepsilon$$

$$\implies a_m > a_n \implies |a_m - a_n| = a_m - a_n > \beta - \varepsilon - (\alpha + \varepsilon) = \beta - \alpha - 2\varepsilon = 3\varepsilon - 2\varepsilon = \varepsilon. \quad \blacksquare$$

## Folgerung 10.2

Die Folge  $(s_n)$  mit  $s_n := 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) ist divergent.

# 11. Unendliche Reihen

## Definition

Sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ . Die Folge  $(s_n)$  mit  $s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) heißt **(unendliche) Reihe** und wird mit  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  bezeichnet (oder mit  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ ).

$s_n$  heißt die **n-te Teilsumme** von  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  und  $a_n$  heißt **n-tes Reihenglied** von  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  heißt **konvergent (divergent)** :  $\iff (s_n)$  konvergiert (divergiert).

Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent, so heißt  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$  der **Reihenwert** oder die **Reihensumme** und wird mit  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  bezeichnet (Im Konvergenzfall hat also das Symbol  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  zwei Bedeutungen).

**Bemerkung:** (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$

(2) Sei  $p \in \mathbb{Z}$  und  $(a_n)_{n \geq p}$  eine Folge. Dann definiert man entsprechend  $s_n := a_p + a_{p+1} + \dots + a_n$  ( $n \geq p$ ) und  $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ . Meist gilt:  $p = 1$  oder  $p = 0$ .

## Beispiele:

(1) Die **harmonische Reihe**  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  :

$$a_n = \frac{1}{n}, s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \xrightarrow{10.2} (s_n) \text{ divergiert.}$$

$$\text{Also: } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergiert.}$$

(2) Die **geometrische Reihe**  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) :

$$\xrightarrow{7.3} (s_n) \text{ konvergiert } \iff |x| < 1. \text{ In diesem Fall: } s_n \rightarrow \frac{1}{1-x} \quad (n \rightarrow \infty).$$

$$\text{Also: } \sum_{n=0}^{\infty} x^n \text{ ist konvergent } \iff |x| < 1. \text{ In diesem Fall: } \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

(3)  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ . §7  $\implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$  ist konvergent und  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$ .

(4)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ ,  $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \implies s_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}) + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1$  ( $n \rightarrow \infty$ ).  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$  ist konvergent,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$

(5)  $\mathbb{Q} = \{a_1, a_2, \dots\}$  Sei  $\varepsilon > 0$ .

$$I_n := (a_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}, a_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}). a_n \in I_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \implies \mathbb{Q} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n.$$

Länge von  $I_n := |I_n|$ ;  $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n}$ ;  $s_n = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2^2} + \dots + \frac{\varepsilon}{2^n} = \frac{\varepsilon}{2}(1 + \frac{1}{2} + \dots + (\frac{1}{2})^{n-1}) = \frac{\varepsilon}{2}(\frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}}) \rightarrow \varepsilon$  ( $n \rightarrow \infty$ ) (*Unendliche geometrische Reihe*). D.h.  $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n|$

ist konvergent und  $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n| = \varepsilon$ . Die Rationalen Zahlen können so mit abzählbaren Intervallen überdeckt werden, dass die Summe der Intervalle beliebig klein ist.

**Satz 11.1 (Cauchy- und Monotoniekriterium sowie Nullfolgeeigenschaft)**

$(a_n)$  sei eine Folge in  $\mathbb{R}$  und  $s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n$ .

- (1) Cauchy-Kriterium:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergiert  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 := n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} :$   

$$\left| \underbrace{\sum_{k=m+1}^n a_k}_{=s_n - s_m} \right| < \varepsilon \quad \forall n > m \geq n_0.$$
- (2) Monotoniekriterium: Sind alle  $a_n \geq 0$  und ist  $(s_n)$  beschränkt, so folgt daraus:  
 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergiert.
- (3)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sei konvergent. Dann:
- (i)  $a_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$
- (ii) Für  $\nu \in \mathbb{N}$  ist  $\sum_{n=\nu+1}^{\infty} a_n = a_{\nu+1} + a_{\nu+2} + \dots$  konvergent und für  $r_\nu := \sum_{n=\nu+1}^{\infty} a_n$  gilt:  $r_\nu \rightarrow 0 \quad (\nu \rightarrow \infty)$

**Beweis**

- (1) Wende Cauchy-Kriterium (10.1) auf  $(s_n)$  an.
- (2)  $s_{n+1} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \implies s_n$  ist monoton wachsend  $\xrightarrow[6.3]{\text{Vor.}}$   $(s_n)$  konvergiert.
- (3) Sei  $s := \lim s_n$ , also  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ .
- (i)  $s_n - s_{n-1} = a_n \implies a_n \rightarrow s - s = 0 \quad (n \rightarrow \infty)$
- (ii) Für  $n \geq \nu + 1 : \sigma_n := a_{\nu+1} + a_{\nu+2} + \dots + a_n = s_n - (a_1 + \dots + a_\nu) = s_n - s_\nu$   
 $\implies \sigma_n \rightarrow s - s_\nu \quad (n \rightarrow \infty)$   
 $\implies \sum_{n=\nu+1}^{\infty} a_n$  konvergiert und  $r_\nu = s - s_\nu$   
 $\implies r_\nu \rightarrow 0 \quad (\nu \rightarrow \infty)$  ■

**Satz 11.2 (Rechenregeln bei Reihen)**

Seien  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergent. Weiter seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)$  konvergent und  $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

**Beweis**

klar. ■

**Definition**

Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  heißt **absolut konvergent** :  $\iff \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$  ist konvergent.

**Satz 11.3 (Dreiecksungleichung für Reihen)**

Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut konvergent, so ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent und

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

**Beweis**

Sei  $\varepsilon > 0$ . Aus der Voraussetzung und Satz 11.1(1) folgt:

$$\begin{aligned} \exists n_0 \in \mathbb{N} : \sum_{k=m+1}^n |a_k| < \varepsilon \quad \forall n > m \geq n_0 \\ \implies \left| \sum_{k=m+1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |a_k| < \varepsilon \quad \forall n > m \geq n_0 \\ \xrightarrow{11.1(1)} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ ist konvergent.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n; \quad \sigma_n := |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \implies |s_n| \leq \sigma_n \\ \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Beispiel**

Die **alternierende Harmonische Reihe**  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ .

Hier:  $a_n = (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ .  $|a_n| = \frac{1}{n} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergiert nicht absolut.

**Behauptung:**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist konvergent. (Später:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \log 2$ )

**Beweis:**  $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ .

$$s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} + a_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}}_{>0} \implies (s_{2n}) \text{ ist monoton wachsend. Analog:}$$

$$(s_{2n-1}) \text{ ist monoton fallend. } s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n} = s_{2n-1} - \frac{1}{2n} \quad (*)$$

Dann gilt  $s_2 \leq s_4 \leq \dots \leq s_{2n} \stackrel{(*)}{=} s_{2n-1} - \frac{1}{2n} < s_{2n-1} \leq \dots \leq s_3 \leq s_1 \implies (s_{2n})$  und  $(s_{2n-1})$  sind beschränkt. 6.3  $\implies (s_{2n})$  und  $(s_{2n-1})$  sind konvergent. Aus (\*) folgt dann  $\lim s_{2n} = \lim s_{2n-1}$ . A16  $\implies (s_n)$  hat genau einen Häufungswert. 9.3  $\implies (s_n)$  ist konvergent.

## 12. Konvergenzkriterien

### Satz 12.1 (Leibnizkriterium)

Sei  $(b_n)$  eine monoton fallende Nullfolge und  $a_n := (-1)^{n+1}b_n$ . Dann ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent.

### Beweis

Wie bei  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$ . Von  $(b_n) = (\frac{1}{n})$  wurde nur benutzt:  $\frac{1}{n}$  ist eine fallende Nullfolge. ■

**Bemerkung:** Gilt  $a_n = b_n$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ , so gilt:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist genau dann konvergent, wenn  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergent ist.

### Satz 12.2 (Majoranten- und Minorantenkriterium)

- (1) **Majorantenkriterium:** Gilt  $|a_n| \leq b_n$  ffa  $n \in \mathbb{N}$  und ist  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergent, so gilt:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist absolut konvergent.
- (2) **Minorantenkriterium:** Gilt  $a_n \geq b_n \geq 0$  ffa  $n \in \mathbb{N}$  und ist  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  divergent, so gilt:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist divergent.

### Beweis

- (1)  $s_n := b_1 + b_2 + \dots + b_n$ ,  $\sigma_n := |a_1| + \dots + |a_n| \forall n \in \mathbb{N}$ . O.b.d.A.:  $|a_n| \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$ .  
 $(s_n)$  ist konvergent  $\xrightarrow{6.1}$   $(s_n)$  ist beschränkt  $\implies \exists c \geq 0 : a_n \leq c \forall n \in \mathbb{N} \implies 0 \leq \sigma_n = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \leq b_1 + b_2 + \dots + b_n = s_n \leq c \forall n \in \mathbb{N} \implies (\sigma_n)$  ist beschränkt  
 $\xrightarrow{11.1(1)} (\sigma_n)$  konvergent.

- (2) Annahme:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist konvergent  $\xrightarrow{(1)}$   $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  ist konvergent. Widerspruch! ■

### Beispiele:

- (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ ,  $a_n = \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{1}{n^2+2n+1} \leq \frac{1}{n^2+2n} \leq \frac{1}{n(n+1)} =: b_n$ . Bekannt:  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergent  $\xrightarrow{12.2(2)}$   $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist konvergent. Folgerung:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  ist konvergent.
- (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2-n+\frac{1}{8}}$ ,  $a_n = \frac{1}{n^2-n+\frac{1}{8}}$ ,  $b_n := \frac{1}{n^2}$ ,  $\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^2}{n^2-n+\frac{1}{8}} \rightarrow 1 (n \rightarrow \infty) \implies \exists m \in \mathbb{N} : \frac{a_n}{b_n} \leq 2 \forall n \geq m \implies a_n \leq 2b_n \forall n \geq m (|a_n| = a_n)$   
 $\sum_{n=1}^{\infty} 2b_n$  ist konvergent  $\xrightarrow{12.2(1)}$   $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist konvergent.
- (3) Sei  $\alpha \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$ :  $\frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow{12.2(2)}$   $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  ist divergent.

- (4) Sei  $\alpha \geq 2, \alpha \in \mathbb{Q}: \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^2} \forall n \in \mathbb{N} \xrightarrow{12.2(1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  ist konvergent.
- (5) In der Übung gezeigt: Ist  $\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{Q}: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$  ist konvergent genau dann, wenn  $\alpha > 1$ .  
 Bemerkung: Ist später die allgemeine Potenz  $a^x$  ( $a > 0, x \in \mathbb{R}$ ) bekannt, so zeigt man analog:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} \iff \alpha > 1 \forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

**Definition ( $\infty$  als Limes Superior)**

Ist  $(\alpha_n)$  eine Folge und  $\alpha_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$  und ist  $(\alpha_n)$  nicht nach oben beschränkt, so setze  $\limsup \alpha_n := \limsup_{n \rightarrow \infty} \alpha_n := \infty$ .

**Vereinbarung:**  $x < \infty \forall x \in \mathbb{R}$

**Satz 12.3 (Wurzelkriterium)**

Sei  $(a_n)$  eine Folge und  $\alpha := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$ .

- (1) Ist  $\alpha < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  absolut konvergent
- (2) Ist  $\alpha > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergent
- (3) Ist  $\alpha = 1$ , so ist keine allgemeine Aussage möglich.

**Beweis**

- (1)  $\alpha < 1$ . Sei  $\varepsilon > 0$  so, dass  $x := \alpha + \varepsilon < 1$ . 9.2  $\implies \sqrt[n]{|a_n|} < \alpha + \varepsilon = x$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies |a_n| < x^n$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ .  $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$  ist konvergent  $\xrightarrow{12.1(1)}$  Behauptung.
- (2) (i)  $\alpha > 1, \alpha < \infty$ : Sei  $\varepsilon > 0$  so, dass  $\alpha - \varepsilon > 1$ . 9.2  $\implies \sqrt[n]{|a_n|} > \alpha - \varepsilon > 1$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N} \implies |a_n| > 1$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N} \implies a_n \rightarrow 0 \xrightarrow{11.1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist divergent.
- (ii)  $\alpha = \infty \implies \sqrt[n]{|a_n|} > 1$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N} \xrightarrow{\text{wie eben}} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist divergent.
- (3) Siehe Beispiele ■

**Beispiele:**

- (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  ist divergent.  $\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \rightarrow 1$ , also  $\alpha = 1$ .
- (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  ist konvergent.  $\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\right)^2 \rightarrow 1$ , also  $\alpha = 1$ .
- (3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}}_{=: a_n}$ .  $\sqrt[n]{|a_n|} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist absolut konvergent.
- (4) Sei  $(a_n)$  eine Folge und  $x \in \mathbb{R}$  mit  $a_n := \begin{cases} \frac{1}{2^n} & \text{für } n \text{ gerade} \\ n \cdot x^n & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$ .
- Betrachte  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .  $\alpha_n := \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } n \text{ gerade} \\ \sqrt[n]{n}|x| & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases}$ .

$\alpha_{2n} = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ .  $\alpha_{2n-1} = 2^{n-1} \sqrt[2n-1]{2n-1} \cdot |x| \rightarrow |x|$ . A16  $\implies \mathcal{H}(\alpha_n) = \{\frac{1}{2}, |x|\}$ .  
 Ist  $|x| < 1 \implies \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergiert absolut.  
 Ist  $|x| > 1 \implies \limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  divergiert.  
 Sei  $|x| = 1$ :  $|a_{2n-1}| = |(2n-1)x^{2n-1}| = 2n-1 \implies a_n \not\rightarrow 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist divergent.

- (5) Sei  $p \in \mathbb{N}$  und  $q \in \mathbb{R}$  und  $|q| < 1$ . **Behauptung:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^p q^n = 0$ . **Beweis:**  $a_n := n^p q^n$ .  
 $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n^p} |q| = (\sqrt[n]{n})^p |q| \rightarrow |q| < 1 \xrightarrow{12.3} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist absolut konvergent  $\implies a_n \rightarrow 0$ .

**Satz 12.4 (Quotientenkriterium)**

Sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  und  $a_n \neq 0$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ .  $\alpha_n := \frac{a_{n+1}}{a_n}$  (ffa  $n \in \mathbb{N}$ ).

- (1) Ist  $|\alpha_n| \geq 1$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist divergent.  
 (2) Es sei  $(\alpha_n)$  beschränkt,  $\beta := \liminf |\alpha_n|$  und  $\alpha := \limsup |\alpha_n|$ .  
 (i) Ist  $\beta > 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist divergent.  
 (ii) Ist  $\alpha < 1 \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist absolut konvergent.  
 (iii) Ist  $\alpha = \beta = 1$ , so ist keine allgemeine Aussage möglich.

**Beweis**

O.B.d.A.:  $a_n \neq 0 \forall n \in \mathbb{N}$

- (1) Dann:  $|a_2| \geq |a_1| > 0$ ,  $|a_3| \geq |a_2| \geq |a_1| > 0$ , ... allgemein:  $|a_n| \geq |a_1| > 0 \forall n \in \mathbb{N} \implies a_n \not\rightarrow 0 \implies$  die Behauptung.  
 (2) (i) Sei  $\beta > 1$ , Sei  $\varepsilon > 0$  so, dass  $\beta - \varepsilon > 1$ . 9.2  $\implies |\alpha_n| > \beta - \varepsilon > 1$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies$  die Behauptung.  
 (ii) Sei  $\alpha < 1$ . Sei  $\varepsilon > 0$  so, dass  $x := \alpha + \varepsilon < 1$ . 9.2  $\implies |\alpha_n| < \alpha + \varepsilon = x$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ .  
 Dann:  $|a_2| \leq |a_1|x$ ,  $|a_3| \leq |a_2|x \leq |a_1|x^2$ , ... allgemein:  $|a_n| \leq |a_1|x^{n-1}$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ .  
 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_1|x^{n-1}$  ist konvergent  $\xrightarrow{12.2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist absolut konvergent.  
 (iii) siehe Beispiele ■

**Beispiele:**

- (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  ist divergent.  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n}{n+1} \rightarrow 1$ , also  $\alpha = \beta = 1$ .  
 (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$  ist konvergent.  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} \rightarrow 1$ , also  $\alpha = \beta = 1$ .

**Beispiel 12.5 (Exponentialfunktion)**

Für  $x \in \mathbb{R}$  betrachte die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

Für welche  $x \in \mathbb{R}$  konvergiert diese Reihe (absolut)?.

Klar: für  $x = 0$  konvergiert die Reihe.

Sei  $x \neq 0$  und  $a_n = \frac{x^n}{n!}$ ;

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} \right| = \frac{|x|}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (\text{also } \alpha = \beta = 0)$$

12.4  $\implies \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  ist absolut konvergent für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Also wird durch  $E(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) eine Funktion  $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert. Diese Funktion  $E$  heißt die **Exponentialfunktion**.

$$E(0) = 1, E(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

**Bemerkung:** Später zeige wir:  $E(r) = e^r \forall r \in \mathbb{Q}$ . Dann *definieren* wir  $e^x := E(x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

**Motivation:**  $b_n := (-1)^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ),  $b_n \not\rightarrow 0 \implies \sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots$  ist divergent.

$a_1 := b_1 + b_2, a_2 := b_3 + b_4, \dots$  also:  $a_n = 0 \forall n \in \mathbb{N} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = (b_1 + b_2) + (b_3 + b_4) + \dots$  ist konvergent. Also: „Im Allgemeinen darf man Klammern in konvergenten Reihen nicht weglassen.“

**Satz 12.6 (In konvergenten Folgen darf man Klammern setzen)**

Sei  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  konvergent und es seien  $n_1, n_2, \dots \in \mathbb{N}$  mit  $n_1 < n_2 < \dots$ . Setze  $b_1 := a_1 + \dots + a_{n_1}, b_2 := a_{n_1+1} + \dots + a_{n_2}$ , allgemein:  $b_k := a_{n_{k-1}+1} + \dots + a_{n_k}$  ( $k \geq 2$ ). Dann ist  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  konvergent und  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

**Beweis**

$s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n; \sigma_k := b_1 + b_2 + \dots + b_k$ . Es ist  $\sigma_k = a_1 + a_2 + \dots + a_{n_k} = s_{n_k} \implies \sigma_k$  ist eine Teilfolge von  $s_n \xrightarrow{8.1(3)} (\sigma_k)$  konvergent und  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sigma_k = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ . ■

# 13. Umordnungen und Produkte von Reihen

## Definition (Umordnung)

Sei  $(a_n)$  eine Folge und  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  *bijektiv*. Setzt man  $b_n := a_{\phi(n)}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), so heißt  $(b_n)$   $(\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$  eine **Umordnung** von  $(a_n)$   $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n)$ .

## Beispiel

$(a_1, a_3, a_2, a_4, a_5, a_7, a_6, a_8)$  ist eine Umordnung von  $(a_n)$  (aber *keine* Teilfolge!).

## Hilfssatz

- (1) Sei  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bijektiv und  $m_0 \in \mathbb{N}$ . Dann gilt:  $\phi(n) \geq m_0$  ffa  $n \in \mathbb{N}$
- (2)  $(b_n)$  ist eine Umordnung von  $(a_n) \iff (a_n)$  ist eine Umordnung von  $(b_n)$   
 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  ist eine Umordnung von  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \iff \sum_{n=1}^{\infty} a_n$  ist eine Umordnung von  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$

## Beweis

- (1)  $A := \{n \in \mathbb{N} : \phi(n) < m_0\}$ . z.z.:  $A$  ist endlich.

Annahme:  $A$  ist unendlich, etwa  $A = \{n_1, n_2, n_3, \dots\}$  mit  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ ;  $\phi$  bijektiv  $\implies \phi(A)$  ist unendlich.

$n \in \phi(A) \implies n = \phi(n_k), n_k \in A \implies n < m_0 \implies \phi(A) \subseteq \{1, 2, \dots, m_0 - 1\}$ ,  
Widerspruch!

- (2) Es sei  $b_n = a_{\phi(n)}$  und  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bijektiv,  $\phi^{-1} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bijektiv.  $b_{\phi^{-1}(n)} = a_{\phi(\phi^{-1}(n))} = a_n \implies (a_n)$  ist eine Umordnung von  $(b_n)$ . ■

### Satz 13.1 (Riemannscher Umordnungssatz)

$(b_n)$  sei eine Umordnung von  $(a_n)$ .

- (1) Ist  $(a_n)$  konvergent, dann gilt:  $(b_n)$  ist konvergent und  $\lim b_n = \lim a_n$ .
- (2) Ist  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  *absolut* konvergent, dann gilt:  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  ist *absolut* konvergent und  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .
- (3) **Riemannscher Umordnungssatz:**  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sei konvergent aber *nicht* absolut konvergent.
  - (i) Es gibt divergente Umordnungen von  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .
  - (ii) Ist  $s \in \mathbb{R}$ , so existiert eine Umordnung von  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  mit Reihenwert  $s$ .

**Beweis**

Für (1) und (2) sei  $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  bijektiv und  $b_n = a_{\phi(n)}$ .

(1) Sei  $a := \lim a_n$ . Sei  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists m_0 \in \mathbb{N} : |a_n - a| < \varepsilon \forall n \geq m_0$ .

Aus Hilfssatz (1) folgt:  $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \phi(n) \geq m_0 \forall n \geq n_0$ . Für  $n \geq n_0 : |b_n - a| = |a_{\phi(n)} - a| < \varepsilon$ .

(2) Wir schreiben  $\sum$  statt  $\sum_{n=1}^{\infty}$ .

Fall 1:  $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$

$s_n := a_1 + a_2 + \dots + a_n, \sigma_n := b_1 + b_2 + \dots + b_n \cdot a_n \geq 0 \implies (s_n)$  ist wachsend, sei  $s := \lim s_n (= \sum a_n)$ . Es gilt:  $s_n \leq s \forall n \in \mathbb{N}$ .

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $j := \max\{\phi(1), \phi(2), \dots, \phi(n)\}$ . Dann:  $\{\phi(1), \phi(2), \dots, \phi(n)\} \subseteq \{1, 2, \dots, j\} \implies \sigma_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n = a_{\phi(1)} + a_{\phi(2)} + \dots + a_{\phi(n)} \leq a_1 + a_2 + \dots + a_j = s_j \leq s \implies (\sigma_n)$  ist wachsend und beschränkt.

6.3  $\implies (\sigma_n)$  ist konvergent. Weiter:  $\lim \sigma_n \leq s$ , d.h.  $\sum b_n \leq \sum a_n$ . Vertauschung der Rollen von  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$  liefert:  $\sum a_n \leq \sum b_n$ .

Fall 2, der allgemeine Fall:  $\sum |b_n|$  ist eine Umordnung von  $\sum |a_n| \xrightarrow{\text{Fall 1}} \sum |b_n|$  konvergiert und  $\sum |b_n| = \sum |a_n|$ . Noch z.z.:  $\sum b_n = \sum a_n$ .

$\alpha_n := a_n + |a_n|, \beta_n := b_n + |b_n|$ . Dann:  $\alpha_n, \beta_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ .  $\sum \alpha_n, \sum \beta_n$  konvergieren,  $\sum \beta_n$  ist eine Umordnung von  $\sum \alpha_n$ . Fall 1  $\implies \sum \beta_n = \sum \alpha_n$ .

Dann:  $\sum a_n = \sum (\alpha_n - |a_n|) = \sum \alpha_n - \sum |a_n| = \sum \beta_n - \sum |b_n| = \sum (\beta_n - |b_n|) = \sum b_n$ .

(3) ohne Beweis. ■

**Vereinbarung:** Für den Rest des Paragraphen seien gegeben:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ . Wir schreiben  $\sum$  statt  $\sum_{n=0}^{\infty}$ . Weiter sei, falls  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$  konvergent,  $s := (\sum a_n)(\sum b_n)$ .

**Definition**

Eine Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} p_n$  heißt eine Produktreihe von  $\sum a_n$  und  $\sum b_n : \iff \{p_0, p_1, p_2, \dots\} = \{a_j b_k : j = 0, 1, \dots; k = 0, 1, \dots\}$  und jedes  $a_j b_k$  kommt in  $(p_n)_{n=0}^{\infty}$  genau einmal vor.

**Satz 13.2 (Alle Produktreihen sind Umordnungen voneinander)**

Sind  $\sum p_n$  und  $\sum q_n$  zwei Produktreihen von  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$ , so ist  $\sum p_n$  eine Umordnung von  $\sum q_n$ .

**Beweis**

Übung. ■

**Satz 13.3 (Absolute Konvergenz geht auf Produktreihen über)**

Sind  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$  absolut konvergent, und ist  $\sum p_n$  eine Produktreihe von  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$ , dann ist  $\sum p_n$  absolut konvergent und  $\sum p_n = s$ .

**Beweis**

$\sigma_n = |p_0| + |p_1| + \dots + |p_n|$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Sei  $n \in \mathbb{N}_0$ . Dann existiert ein  $m \in \mathbb{N} : \sigma_n \leq (\sum_{k=0}^m |a_k|)(\sum_{k=0}^m |b_k|)$ .

$\alpha_k := |a_0| + |a_1| + \dots + |a_k|$ ,  $(\alpha_k)$  konvergiert und  $\alpha_k \rightarrow \sum |a_k|$ ,  $(\alpha_k)$  ist wachsend  $\implies \alpha_k \leq \sum |a_n| \implies 0 \leq \sigma_n \leq (\sum |a_n|)(\sum |b_n|) \forall n \in \mathbb{N}_0 \implies (\sigma_n)$  ist beschränkt (und wachsend).

6.3  $\implies (\sigma_n)$  konvergiert  $\implies \sum p_n$  ist absolut konvergent. Noch z.z.:  $\sum p_n = s$ .

Dazu betrachten wir eine spezielle Produktreihe  $\sum q_n$  („Anordnung nach Quadraten“):

$$q_0 := a_0 b_0, q_1 := a_0 b_1, q_2 := a_1 b_1, q_3 := a_1 b_0, q_4 := a_0 b_2, q_5 := a_1 b_2, \dots$$

$$s_n := q_0 + q_1 + \dots + q_n$$

Nach dem schon Bewiesenen konvergiert  $\sum q_n$ , also auch  $(s_n)$ .

Nachrechnen:  $\underbrace{(a_0 + a_1 + \dots + a_n)}_{\rightarrow \sum a_n} \underbrace{(b_0 + b_1 + \dots + b_n)}_{\rightarrow \sum b_n} = s_{n^2+2n} \forall n \in \mathbb{N}$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} s = \sum q_n.$$

Aus 13.1 und 13.2 folgt:  $\sum p_n = \sum a_n \sum b_n = s$ . ■

**Definition (Cauchyprodukt)**

Setze  $c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ), also:  $c_0 = a_0 b_0, c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \dots$

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  heißt **Cauchyprodukt** von  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$ .

**Satz 13.4 (Cauchyprodukt absolut konvergierender Folgen konvergiert)**

Sind  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$  absolut konvergent, so konvergiert ihr Cauchyprodukt  $\sum c_n$  und  $\sum c_n = s$ .

**Beweis**

Sei  $\sum p_n$  die Produktreihe von  $\sum a_n$  und  $\sum b_n$ , die durch „Anordnung nach Diagonalen“ entsteht. ( $p_0 = a_0 b_0, p_1 = a_0 b_1, p_2 = a_1 b_0, p_3 = a_0 b_2, p_4 = a_1 b_1, p_5 = a_0 b_3, \dots$ ). Dann:  $c_0 = a_0 b_0 = p_0, c_1 = p_1 + p_2, c_2 = p_3 + p_4 + p_5$ .  $\sum c_n$  entsteht also aus  $\sum p_n$  durch Setzen vom Klammern. 13.3  $\implies \sum p_n$  konvergiert absolut und  $\sum p_n = s \xrightarrow{12.6}$  Behauptung. ■

**Beispiel**

Für  $x \in \mathbb{R}$  mit  $|x| < 1$  ist  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  absolut konvergent und  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ . Für  $|x| < 1$ :  $\frac{1}{(1-x)^2} = (\sum_{n=0}^{\infty} x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} x^n) \stackrel{13.4}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n$ , wobei  $c_n = \sum_{k=0}^n x^k x^{n-k} = \sum_{k=0}^n x^n = (n+1)x^n$ .  
 $\implies \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$ .

**Satz 13.5 ( $E(r) = e^r \forall r \in \mathbb{Q}$ )**

Erinnerung:  $E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  ( $x \in \mathbb{R}$ )

- (1)  $E(x + y) = E(x)E(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$ ; allgemein:  $E(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = E(x_1)E(x_2) \cdots E(x_n) \quad \forall x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ .
- (2)  $E(x) > 1 \quad \forall x > 0$ .
- (3)  $E(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, E(-x) = \frac{1}{E(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ .
- (4) Aus  $x < y$  folgt:  $E(x) < E(y)$ .
- (5)  $E(r) = e^r \quad \forall r \in \mathbb{Q}$ .

**Beweis**

(1)  $E(x)E(y) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) \stackrel{13.4}{=} \sum_{n=0}^{\infty} c_n$  mit

$$c_n = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \cdot \frac{y^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \frac{(x+y)^n}{n!}.$$

$$\implies E(x)E(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = E(x+y).$$

(2)  $x > 0 : E(x) = 1 + x + \underbrace{\frac{x^2}{2!} + \dots}_{>0} > 1$ .

(3)  $1 = E(0) = E(x + (-x)) \stackrel{(1)}{=} E(x)E(-x)$ . Wir wissen:  $E(x) > 0 \quad \forall x > 0$ .

Sei  $x < 0 \implies -x > 0 \implies E(-x) > 0 \implies E(x) > 0$ .

(4) Sei  $x < y \implies y - x > 0 \stackrel{(2)}{\implies} 1 < E(y - x) \stackrel{(1)}{=} E(y)E(-x) \stackrel{(3)}{=} \frac{E(y)}{E(x)} \implies E(x) < E(y)$ .

(5) Seien  $n, m \in \mathbb{N}$ .  $E(n) = E(\underbrace{1 + \dots + 1}_{n \text{ mal}}) \stackrel{(1)}{=} E(1)^n = e^n$ .

$$e = E(1) = E(n \cdot \frac{1}{n}) = E(\underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{n \text{ mal}}) = E(\frac{1}{n})^n \implies E(\frac{1}{n}) = e^{\frac{1}{n}} (= \sqrt[n]{e}).$$

$$E(\frac{m}{n}) = E(\underbrace{\frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n}}_{m \text{ mal}}) \stackrel{(1)}{=} E(\frac{1}{n})^m = (e^{\frac{1}{n}})^m = e^{\frac{m}{n}}. \text{ Also: } E(r) = e^r \quad \forall r \in \mathbb{Q} \text{ mit } r \geq 0.$$

Sei  $r \in \mathbb{Q}$  und  $r < 0$ . Dann:  $-r > 0 \implies E(-r) = e^{-r} \stackrel{(3)}{\implies} E(r) = e^r$ . ■

**Definition ( $e^x$ )**

$$e^x := E(x) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

**Hilfssatz 13.6**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

**Beweis**

$\alpha_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$ ,  $0 \leq \alpha_n \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $(\alpha_n)$  ist also beschränkt.  $\alpha = \limsup \alpha_n$ . Wegen 9.3 genügt es zu zeigen:  $\alpha = 0$ . Annahme:  $\alpha > 0$ . Setze  $x := \frac{2}{\alpha}$ ;  $a_n = \frac{x^n}{n!} \implies \sum a_n$  ist konvergent.  $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{\sqrt[n]{n!}} = |x| \cdot \alpha_n \implies \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = |x| \cdot \alpha = 2 > 1 \xrightarrow{12.3} \sum a_n$  ist divergent, Widerspruch! ■

**Beispiel 13.7**

Behauptung: Die Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

konvergieren absolut für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

**Definition (Kosinus und Sinus)**

$$\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{Kosinus})$$

$$\sin x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (\mathbf{Sinus})$$

**Beweis**

Nur für die erste Reihe:

$$a_n := (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{(2n)!} \implies \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{x^2}{((2n)!)^{\frac{1}{n}}} = \frac{x^2}{(((2n)!)^{\frac{1}{2n}})^2} \xrightarrow{13.6} 0 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (\text{wegen 12.3}). \quad \blacksquare$$

# 14. Potenzreihen

## Definition (Potenzreihe)

Sei  $(a_n)_{n=0}^\infty$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ . Eine Reihe der Form  $\sum_{n=0}^\infty a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$  heißt eine **Potenzreihe** (PR). Die Menge  $\{x \in \mathbb{R} : \sum_{n=0}^\infty a_n x^n \text{ konvergent}\}$  heißt der **Konvergenzbereich** (KB) der Potenzreihe. Klar: Die Potenzreihe konvergiert für  $x = 0$ .

**Erinnerung:** Ist  $(x_n)$  eine Folge, die nicht nach oben beschränkt ist und  $x_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N}$ , so war  $\limsup x_n = \infty$ .

**Vereinbarung:** „ $\frac{1}{0} := \infty$ “, „ $\frac{1}{\infty} := 0$ “

### Satz 14.1 (Konvergenz von Potenzreihen)

$\sum_{n=0}^\infty a_n x^n$  sei eine Potenzreihe,  $\rho := \limsup \sqrt[n]{|a_n|}$  und  $r := \frac{1}{\rho}$  (also  $r = 0$ , falls  $\rho = \infty$  und  $r = \infty$  falls  $\rho = 0$ ).

- (1) Ist  $r = 0$ , so konvergiert die Potenzreihe nur für  $x = 0$
- (2) Ist  $r = \infty$ , so konvergiert die Potenzreihe absolut  $\forall x \in \mathbb{R}$
- (3) Ist  $0 < r < \infty$ , so konvergiert die Potenzreihe absolut für  $|x| < r$  und sie divergiert für  $|x| > r$  (Im Falle  $|x| = r$ , also für  $x = r$  und  $x = -r$  ist keine allgemeine Aussage möglich).

Die Zahl  $r$  heißt der **Konvergenzradius** der Potenzreihe. Der Konvergenzbereich der Potenzreihe hat also folgende Form:  $\{0\}$ , falls  $r = 0$ ;  $\mathbb{R}$  falls  $r = \infty$  und  $(-r, r)$ ,  $(-r, r]$ ,  $[-r, r)$  oder  $[-r, r]$  wenn  $0 < r < \infty$ .

## Beweis

- (1)  $r = 0 \implies \rho = \infty \implies \sqrt[n]{|a_n|}$  ist nicht nach oben beschränkt. Sei  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq 0$ .  
 $(\sqrt[n]{|a_n x^n|}) = (\sqrt[n]{|a_n|} |x|) \implies (\sqrt[n]{|a_n x^n|})$  ist nicht nach oben beschränkt  $\xrightarrow{12.3} \sum a_n x^n$  divergent.
- (2) Sei  $r = \infty \implies \rho = 0$ .  $x \in \mathbb{R} : \limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} |x| = \rho |x| = 0 < 1 \xrightarrow{12.3} \sum a_n x^n$
- (3)  $0 < r < \infty$ ,  $x \in \mathbb{R} : \limsup \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \rho |x| = \frac{|x|}{r} < 1 \iff |x| < r$ . Behauptung folgt aus 12.3. ■

## Beispiele:

- (1)  $\sum_{n=0}^\infty x^n$  ( $a_n = 1 \forall n \in \mathbb{N}_0$ )  $\implies r = \rho = 1$ .  $\sum x^n$  konvergent  $\iff |x| < 1$

- (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$  ( $a_0 = 0, a_n = \frac{1}{n^2} (n \geq 1)$ )  $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \rightarrow 1$  ( $\rho = 1 = r$ ). Die Potenzreihe konvergiert absolut für  $|x| < 1$ , sie divergiert für  $|x| > 1$ .  $x = 1 : \sum \frac{1}{n^2}$  konvergent;  $x = -1 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$  konvergent (Leibniz!)
- (3)  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ,  $\rho = r = 1$ . Die Potenzreihe konvergiert absolut für  $|x| < 1$ , sie divergiert für  $|x| > 1$ .  $x = 1 : \sum \frac{1}{n}$  divergent;  $x = -1 : \sum \frac{(-1)^n}{n}$  konvergent
- (4)  $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(n^4 + 2n^2)}_{:=a_n} x^n$ ;  $1 \leq a_n \leq n^4 + 2n^4 = 3n^4 \forall n \in \mathbb{N} \implies 1 \leq \sqrt[n]{|a_n|} \leq \underbrace{\sqrt[n]{3}(\sqrt[n]{n})^4}_{\rightarrow 1} \implies \sqrt[n]{|a_n|} \rightarrow 1 \implies r = \rho = 1$  Die Potenzreihe konvergiert für  $|x| < 1$  absolut, sie divergiert für  $|x| > 1$ . Für  $|x| = 1: |a_n x^n| = |a_n| |x^n| \not\rightarrow 0 \implies$  divergent in  $x = 1, x = -1$ .
- (5)  $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$ ;  $a_n := n^n \sqrt[n]{|a_n|} = n \implies \rho = \infty \implies r = 0$
- (6)  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  mit  $a_n := \begin{cases} 0 & n \text{ gerade} \\ n2^n & n \text{ ungerade} \end{cases}$ . A16  $\implies \mathcal{H}(\sqrt[n]{|a_n|}) = \{0, 2\} \implies \rho = 2 \implies r = \frac{1}{2}$ . Die Potenzreihe konvergiert absolut für  $|x| < \frac{1}{2}$ , sie divergiert für  $|x| > \frac{1}{2}$ . Sei  $|x| = \frac{1}{2}$ .  $|a_n x^n| = |a_n| \frac{1}{2^n} = n$  falls  $n$  ungerade  $\implies a_n x^n \not\rightarrow 0 \implies$  die Potenzreihe divergiert für  $|x| = \frac{1}{2}$ .

Die folgenden Potenzreihen haben jeweils den Konvergenzradius  $r = \infty$  :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}, \quad \text{falls } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ KR } r = \infty \text{ hat.}$$

**Definition**

$$\cosh x := \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (\text{Cosinus Hyperbolicus})$$

$$\sinh x := \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \quad (x \in \mathbb{R}) \quad (\text{Sinus Hyperbolicus})$$

$$\text{Nachrechnen: } \cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \sinh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

**Vereinbarung:** Sei  $\tilde{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  und  $a < b$ .

$(a - r, b + r) := (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$  falls  $r = \infty$  Sei  $r_1, r_2 \in \tilde{\mathbb{R}}$  und  $r_1 = \infty$  oder  $r_2 = \infty$ .

$$\min\{r_1, r_2\} := \begin{cases} \infty & \text{falls } r_1 = \infty = r_2 \\ r_2 & \text{falls } r_2 < \infty, r_1 = \infty \\ r_1 & \text{falls } r_1 < \infty, r_2 = \infty \end{cases}$$

**Satz 14.2 (Konvergenzradien von Cauchyprodukten)**

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  seien Potenzreihen mit den Konvergenzradien  $r_1$  bzw.  $r_2$ . Sei  $c_n := \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) und  $r$  sei der Konvergenzradius der Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ .  $R := \min\{r_1, r_2\}$ . Dann:  $R \leq r$  und für  $x \in (-R, R) : \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n)$

**Beweis**

Sei  $x \in (-R, R) : (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n) \stackrel{13.4}{=} \sum_{n=0}^{\infty} d_n$  wobei

$$d_n = \sum_{k=0}^n a_k x^k b_{n-k} x^{n-k} = x^n c_n \implies R \leq r \text{ und}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n). \quad \blacksquare$$

**Bemerkung:** Sei  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$  eine Folge und  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Eine Reihe der Form  $(*) \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  heißt ebenfalls eine Potenzreihe ( $x_0$  heißt **Entwicklungspunkt** der Potenzreihe). Substitution  $t := x - x_0$ , dann erhält man die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ . Sei  $r$  der Konvergenzradius dieser Potenzreihe. Dann: ist  $r = 0$ , so konvergiert die Potenzreihe in  $(*)$  *nur* in  $x = x_0$ . Ist  $r = \infty$ , so konvergiert die Potenzreihe absolut  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Ist  $0 < r < \infty$ , so konvergiert die Potenzreihe in  $(*)$  absolut für  $|x - x_0| < r$ , sie divergiert für  $|x - x_0| > r$ .

# 15. $g$ -adische Entwicklungen

**Vereinbarung:** Stets in diesem Paragraphen:  $g \in \mathbb{N}$ ,  $g \geq 2$ ,  $G := \{0, 1, \dots, g-1\}$ .

## Satz 15.1 (Konvergenz $g$ -adischer Entwicklungen)

- (1) Sei  $(z_n)_{n \geq 1}$  eine Folge in  $G \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{g^n}$  ist konvergent.
- (2) Ist  $m \in \mathbb{N} \implies \sum_{n=m}^{\infty} \frac{g-1}{g^n} = \frac{1}{g^{m-1}}$

### Beweis

(1)  $\frac{|z_n|}{g^n} = \frac{z_n}{g^n} \leq \frac{g-1}{g^n} \forall n \in \mathbb{N}$ .  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g-1}{g^n}$  ist konvergent  $\xrightarrow{12.2}$  Behauptung.

(2)  $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{g-1}{g^n} = \frac{g-1}{g^m} + \frac{g-1}{g^{m+1}} + \dots = \frac{g-1}{g^m} \cdot (1 + \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} + \dots) = \frac{g-1}{g^m} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{g}} = \frac{1}{g^{m-1}}$ . ■

### Definition

Sei  $(z_n)_{n \geq 1}$  eine Folge in  $G$  und es gelte  $(*) z_n \neq g-1$  für unendlich viele  $n \in \mathbb{N}$ . Dann heißt  $0, z_1 z_2 z_3 \dots := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{g^n}$  ein  **$g$ -adischer Bruch** oder eine  **$g$ -adische Entwicklung**.

### Beispiele:

- (1)  $g = 10$  (Dezimalentwicklung);  $0,333\dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{10^n} = \frac{1}{3}$ .
- (2)  $g = 2$  (Dualentwicklung);  $0,111000\dots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ .

**Bemerkung:** (1) Die Negation von  $(*)$  lautet:  $z_n = g-1$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ .

- (2) Ist  $0, z_1 z_2 z_3 \dots$  ein  $g$ -adischer Bruch und existiert ein  $m \in \mathbb{N} : z_n = 0$  für  $n > m$ , so schreibt man:  $0, z_1 z_2 z_3 \dots z_m$
- (3)  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  seien konvergent und es gelte  $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N} \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ . Gilt zusätzlich  $a_n < b_n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$ , so gilt  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \sum_{n=1}^{\infty} b_n$  (Beweis in Übung).

## Satz 15.2 (Eindeutigkeit der $g$ -adischen Entwicklung)

Sei  $a = 0, z_1 z_2 z_3 \dots$  ein  $g$ -adischer Bruch.

- (1)  $a \in [0, 1)$
- (2) Ist  $0, w_1 w_2 w_3 \dots$  eine weitere  $g$ -adische Entwicklung von  $a$ , so gilt  $z_n = w_n \forall n \in \mathbb{N}$ .

**Beweis**

(1)  $0 \leq a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{g^n} \stackrel{(*), Bem.(2)}{<} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g-1}{g^n} \stackrel{15.1}{=} 1.$

(2) **Annahme:**  $\exists n \in \mathbb{N} : z_n \neq w_n$ . Sei  $m$  der kleinste solche Index, also  $z_m \neq w_m$  und  $z_j = w_j$  für  $j = 1, \dots, m-1$ . Etwa  $z_m < w_m \implies z_m - w_m < 0 \stackrel{z_m - w_m \in \mathbb{Z}}{\implies} z_m - w_m \leq -1$ .  
 $\forall n \in \mathbb{N} : z_n - w_n \leq z_n \leq g-1$ .  $\exists \nu \in \mathbb{N}$  mit  $\nu \geq m+1$  und  $z_\nu - w_\nu < g-1$ .  
 (andererseits  $z_\nu - w_\nu = g-1 \forall \nu \geq m+1 \implies z_\nu = w_\nu + g-1 \forall \nu \geq m+1 \implies w_\nu = 0 \forall \nu \geq m+1 \implies z_\nu = g-1 \forall \nu \geq m+1$ . Widerspruch zu (\*)). Dann:

$$\begin{aligned} 0 &= a - a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{g^n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_n}{g^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n - w_n}{g^n} = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{z_n - w_n}{g^n} \\ &= \underbrace{\frac{z_m - w_m}{g^m}}_{\leq -\frac{1}{g^m}} + \underbrace{\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{z_n - w_n}{g^n}}_{< \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{g-1}{g^n}} < -\frac{1}{g^m} + \underbrace{\sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{g-1}{g^n}}_{\stackrel{15.1}{=} \frac{1}{g^n}} = 0 \\ &\implies 0 < 0 \text{ Widerspruch.} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Satz 15.3 (Existenz der  $g$ -adischen Entwicklung)**

Ist  $a \in [0, 1)$ , so lässt sich  $a$  eindeutig als  $g$ -adischer Bruch darstellen.

**Beweis**

Eindeutigkeit siehe 15.2.

Existenz: Definiere  $(z_n)_{n \geq 1}$  wie folgt:  $z_1 := [a \cdot g], z_{n+1} := [(a - \frac{z_1}{g} - \frac{z_2}{g^2} - \dots - \frac{z_n}{g^n}) \cdot g^{n+1}]$  ( $n \geq 1$ ).

In der Übung:  $z_n \in G \forall n \in \mathbb{N}$

Es gilt: (\*\*)  $\underbrace{\frac{z_1}{g} + \frac{z_2}{g^2} + \dots + \frac{z_n}{g^n}}_{=: s_n} \leq a < \underbrace{\frac{z_1}{g} + \frac{z_2}{g^2} + \dots + \frac{z_n}{g^n}}_{=: s_n} + \frac{1}{g^n} \forall n \in \mathbb{N} \implies s_n \leq a < s_n + \frac{1}{g^n} \forall n \in \mathbb{N}$

$\mathbb{N} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{g^n}.$

Noch zu zeigen ist:  $z_n \neq g-1$  für unendlich viele  $n$ . **Annahme:**  $\exists m \in \mathbb{N} : z_n = g-1 \forall n \geq m$ .

Dann:  $a = \sum_{n=1}^{\infty} z_n g^n = \underbrace{\sum_{n=1}^{m-1} \frac{z_n}{g^n}}_{=: s_{m-1}} + \underbrace{\sum_{n=m}^{\infty} \frac{g-1}{g^n}}_{=: \frac{1}{g^{m-1}}} \implies a = s_{m-1} + \frac{1}{g^{m-1}}$  Widerspruch zu (\*\*).  $\blacksquare$

**Bemerkung:** Ist  $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$ , so lässt sich  $a$  eindeutig in der Form  $a = [a] + 0, z_1 z_2 z_3 \dots$  darstellen. Ist  $g = 10$ , so schreibt man dafür  $a = [a], z_1 z_2 z_3 \dots$ . Beispiel:  $1,333\dots$

**Satz 15.4 ( $\mathbb{R}$  ist überabzählbar)**

Die Menge der reellen Zahlen ist überabzählbar.

**Beweis**

Es genügt zu zeigen:  $[0, 1)$  ist überabzählbar.

15.  $g$ -adische Entwicklungen

**Annahme:**  $[0, 1)$  ist abzählbar, also  $[0, 1) = \{a_1, a_2, \dots\}, a_j \neq a_k$  für  $j \neq k$ . Für  $j \in \mathbb{N}$  sei  $a_j = 0, z_1^{(j)} z_2^{(j)} z_3^{(j)} \dots$  die 3-adische Entwicklung von  $a_j$ . ( $z_k^{(j)} \in \{0, 1, 2\}$ ).

$$z_k := \begin{cases} 1 & \text{falls } z_k^{(k)} \in \{0, 2\} \\ 0 & \text{falls } z_k^{(k)} = 1 \end{cases}$$

Dann:  $z_k \neq z_k^{(k)} \forall k \in \mathbb{N}, z_k \neq g - 1 \forall k \in \mathbb{N}$ .  $a := 0, z_1 z_2 z_3 \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z_n}{g^n}$ . 15.2  $\implies a \in [0, 1) \implies \exists m \in \mathbb{N} : a = a_m \implies 0, z_1 z_2 z_3 \dots = 0, z_1^{(m)} z_2^{(m)} z_3^{(m)} \dots$ . 15.2  $\implies z_j = z_j^{(m)} \forall j \in \mathbb{N} \implies z_m = z_m^{(m)}$ . Widerspruch! ■

# 16. Grenzwerte bei Funktionen

## Definition (Häufungspunkt)

Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$  und  $x_0 \in \mathbb{R}$ .  $x_0$  heißt ein **Häufungspunkt** (HP) von  $D : \iff \exists$  Folge  $x_n$  in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ .

## Beispiele:

- (1) Ist  $D$  endlich, so hat  $D$  keine Häufungspunkte.
- (2)  $D = (0, 1]$ .  $x_0$  ist Häufungspunkt von  $D \iff x_0 \in [0, 1]$ .
- (3)  $D = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ .  $D$  hat genau einen Häufungspunkt:  $x_0 = 0$
- (4)  $D = \mathbb{Q}$ . 8.1(2)  $\implies$  jedes  $x_0 \in \mathbb{R}$  ist ein Häufungspunkt von  $\mathbb{Q}$ .

**Bemerkung:** Unterscheide zwischen „ $x_0$  ist Häufungswert von  $(a_n)$ “ und „ $x_0$  ist Häufungspunkt von  $\{a_1, a_2, \dots\}$ “. Beispiel:  $a_n = (-1)^n$ .  $\mathcal{H}(a_n) = \{1, -1\}$ ,  $\{a_1, a_2, \dots\} = \{-1, 1\}$  hat keine Häufungspunkte.

**Zur Übung:** Sei  $D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$ .  $x_0$  ist Häufungspunkt von  $D \iff \forall \varepsilon > 0$  gilt:  $D \cap (U_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$

**Vereinbarung:** Ab jetzt sei in dem Paragraphen gegeben:  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ .  $x_0$  ist Häufungspunkt von  $D$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

## Definition

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert :  $\iff \exists a \in \mathbb{R}$  mit: für jede Folge  $(x_n)$  in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  gilt:  $f(x_n) \rightarrow a$ . In diesem Fall schreibt man:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$  oder  $f(x) \rightarrow a$  ( $x \rightarrow x_0$ )

**Bemerkung:** (1) Existiert  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , so ist obiges  $a$  eindeutig bestimmt. (Übung)

(2) Falls  $x_0 \in D$ , so ist der Wert  $f(x_0)$  in obiger Definition nicht relevant.

## Beispiele:

(1)  $D = (0, 1]$ .

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } x \in (0, \frac{1}{2}) \\ \frac{1}{2} & \text{falls } x = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{falls } x \in (\frac{1}{2}, 1) \\ 0 & \text{falls } x = 1 \end{cases}$$

$x_0 = 0$ : Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $D$  mit  $x_n \rightarrow 0$ . Dann  $x_n < \frac{1}{2}$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) = x_n^2$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) \rightarrow 0$ , d.h.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ .

$x_0 = 1$ : Analog:  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ .

$x_0 = \frac{1}{2}$ : Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $D \setminus \{\frac{1}{2}\}$  und  $x_n < \frac{1}{2} \forall n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) = x_n^2 \rightarrow \frac{1}{4}$ .  
 Sei  $(z_n)$  eine Folge in  $D \setminus \{\frac{1}{2}\}$  und  $z_n > \frac{1}{2} \forall n \in \mathbb{N} \implies f(z_n) = 1 \rightarrow 1$  d.h.:  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)$

existiert nicht. Aber:  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x)$  existiert und ist  $\frac{1}{4}$  und  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x)$  existiert und ist 1.  

$$\lim_{x \in (0, \frac{1}{2})} f(x) = \frac{1}{4} \quad \lim_{x \in (\frac{1}{2}, 1)} f(x) = 1$$

Dafür schreibt man:  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = \frac{1}{4}$  und  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = 1$ .

(2)  $D = [0, \infty)$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $f(x) = \sqrt[p]{x}$ . Sei  $x_0 \in D$ . Sei  $(x_n)$  Folge in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ . 7.1  
 $\implies f(x_n) = \sqrt[p]{x_n} \rightarrow \sqrt[p]{x_0}$ . Das heißt:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

**Vereinbarung:** Für  $\delta > 0$ :  $D_\delta(x_n) = D \cap U_\delta(x_0)$ .  $\dot{D}_\delta(x_0) = D_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ .

**Satz 16.1 (Grenzwertsätze bei Funktionen)**

- (1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert  $\iff$  für jede Folge  $(x_n)$  in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  ist  $f(x_n)$  konvergent.
- (2) Für  $a \in \mathbb{R}$  gilt:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert und ist gleich  $a \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$  mit (\*)  
 $|f(x) - a| < \varepsilon \forall x \in \dot{D}_\delta(x_0)$ .
- (3) *Cauchy Kriterium:*  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ :  $|f(x) - f(x')| < \varepsilon \forall x, x' \in \dot{D}_\delta(x_0)$

**Beweis**

- (1) „ $\implies$ “: aus Definition.  
 „ $\impliedby$ “: Seien  $(x_n), (z_n)$  Folgen in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $x_n \rightarrow x_0, z_n \rightarrow x_0$ . Voraussetzung  $\implies$  es existiert  $a := \lim f(x_n)$  und  $b := \lim f(z_n)$ . Zu zeigen ist:  $a = b$ . Sei  $t_n$  definiert durch  $(t_n) := (x_1, z_1, x_2, z_2, \dots)$ .  $(t_n)$  ist Folge in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $t_n \rightarrow x_0$ , Voraussetzung  $\implies \exists c := \lim f(t_n)$ .  $(f(x_n))$  ist Teilfolge von  $(f(t_n)) \implies a = c$ , analog:  $b = c \implies a = b$ .
- (2) „ $\implies$ “: Sei  $\varepsilon > 0$ . **Annahme:** Es gibt kein  $\delta > 0$ , so dass (\*) gilt. Das heißt:  $\forall \delta > 0$  existiert ein  $x_j \in \dot{D}_\delta(x_0)$ :  $|f(x_j) - a| \geq \varepsilon$ , also  $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in \dot{D}_{\frac{1}{n}}(x_0) : |f(x_n) - a| \geq \varepsilon$ . Das heißt:  $(x_n)$  ist eine Folge in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  und  $f(x_n) \not\rightarrow a$ , Widerspruch.  
 „ $\impliedby$ “: Sei  $x_n$  eine Folge in  $D \setminus \{x_0\}$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ . Zu zeigen ist:  $f(x_n) \rightarrow a$ . Sei  $\varepsilon > 0$ .  $\exists \delta > 0$  so dass (\*) gilt. Dann:  $x_n \in \dot{D}_\delta(x_0)$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies |f(x_n) - a| < \varepsilon$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ .
- (3) In Übung. ■

**Satz 16.2 (Rechnen mit Funktionsgrenzwerten)**

Seien  $g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$  zwei weitere Funktionen und es gelte  $f(x) \rightarrow a, g(x) \rightarrow b$  ( $x \rightarrow x_0$ ).

- (1)  $f(x) + g(x) \rightarrow a + b, f(x) \cdot g(x) \rightarrow ab, |f(x)| \rightarrow |a|$  ( $x \rightarrow x_0$ )
- (2) Ist  $a \neq 0 \implies \exists \delta > 0 : f(x) \neq 0 \forall x \in \dot{D}_\delta(x_0)$ . Für  $\frac{1}{f} : \dot{D}_\delta(x_0) \rightarrow \mathbb{R}$  gilt:  $\frac{1}{f(x)} \rightarrow \frac{1}{a}$ .

- (3) Existiert ein  $\delta > 0$  mit  $f \leq g$  auf  $\dot{D}_\delta(x_0) \implies a \leq b$
- (4) Existiert ein  $\delta > 0$  mit  $f \leq h \leq g$  auf  $\dot{D}_\delta(x_0)$  und  $a = b \implies \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = a$ .

**Beweis**

folgt aus 6.2

Zum Beispiel: (3) Sei  $(x_n)$  Folge in  $D \setminus \{x_0\}$  und  $x_n \rightarrow x_0$ . Dann:  $x_n \in \dot{D}_\delta(x_0)$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) \leq g(x_n)$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies a = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{5.2}{\leq} \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b$ . ■

**Definition**(1) Sei  $(a_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$ . $\lim a_n = \infty$  (oder  $a_n \rightarrow \infty$ ) :  $\iff \forall c > 0 \exists n_0 = n_0(c) \in \mathbb{N} : a_n > c \forall n \geq n_0$ . $\lim a_n = -\infty$  (oder  $a_n \rightarrow -\infty$ ) :  $\iff \forall c < 0 \exists n_0 = n_0(c) \in \mathbb{N} : a_n < c \forall n \geq n_0$ .(2)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$  (oder  $f(x) \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow x_0$ )) :  $\iff$  für jede Folge  $(x_n)$  in  $D \setminus \{x_0\}$  und  $x_n \rightarrow x_0$  gilt:  $f(x_n) \rightarrow \infty$ . $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$  (oder  $f(x) \rightarrow -\infty$  ( $x \rightarrow x_0$ )) :  $\iff$  für jede Folge  $(x_n)$  in  $D \setminus \{x_0\}$  und  $x_n \rightarrow x_0$  gilt:  $f(x_n) \rightarrow -\infty$ .(3) Sei  $D$  nicht nach oben beschränkt.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$  (oder  $f(x) \rightarrow a$ ) :  $\iff$  für jede Folge  $(x_n)$  in  $D$  mit  $x_n \rightarrow \infty$  gilt:  $f(x_n) \rightarrow a$  ( $a = \pm\infty$  zugelassen).Sei  $D$  nicht nach unten beschränkt.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$  (oder  $f(x) \rightarrow -\infty$ ) :  $\iff$  für jede Folge  $(x_n)$  in  $D$  mit  $x_n \rightarrow -\infty$  gilt:  $f(x_n) \rightarrow a$  ( $a = \pm\infty$  zugelassen).**Beispiele:**(1)  $a_n := x^n$  ( $x > 1$ ). Behauptung:  $x^n \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Sei  $c > 0$ .  $c < \frac{1}{x^n} < 1 \implies \frac{1}{x^n} \rightarrow 0 \implies \frac{1}{x^n} < \frac{1}{c}$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies x^n > c$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ .(2) Sei  $p \in \mathbb{N}$ . Dann  $x^p \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow \infty$ ). Siehe Übung.(3)  $\frac{1}{x} \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow 0+$ ),  $\frac{1}{x} \rightarrow -\infty$  ( $x \rightarrow 0-$ ).**Satz 16.3 (Grenzwerte der Exponentialfunktion)**

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

(1) Für  $p \in \mathbb{N}_0$  :  $\frac{e^x}{x^p} \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow \infty$ )(2)  $e^x \rightarrow \infty$  ( $x \rightarrow \infty$ )(3)  $e^x \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow -\infty$ )

**Beweis**

$$(1) e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} + \cdots \geq \frac{x^{p+1}}{(p+1)!} \quad \forall x \geq 0 \implies \frac{e^x}{x^p} \geq \frac{x}{(p+1)!} \quad \forall x > 0 \implies$$

Behauptung.

(2) Folgt aus 1 mit  $p = 0$ .

$$(3) e^{-x} = \frac{1}{e^x} \stackrel{(2)}{\longrightarrow} 0 \quad (x \rightarrow -\infty) \implies e^x \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow -\infty). \quad \blacksquare$$

# 17. Stetigkeit

**Vereinbarung:** In diesem Paragraphen seien stets:  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in D$  und  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

## Definition

- (1)  $f$  heißt stetig in  $x_0 : \iff$  für jede Folge  $(x_n)$  in  $D$  mit  $x_n \rightarrow x_0$  gilt:  $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$ .
- (2)  $f$  heißt stetig auf  $D : \iff$   $f$  ist in jedem  $x \in D$  stetig.
- (3)  $C(D) := \{g : D \rightarrow \mathbb{R} : g \text{ ist stetig auf } D\}$ .

## Beispiele:

$$(1) D := [0, 1] \cup 2. f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x \in [0, 1) \\ 0 & \text{für } x = 1 \\ 1 & \text{für } x = 2 \end{cases}$$

Klar:  $f$  ist stetig in jedem  $x \in [0, 1)$ .

$x_0 = 1$ :  $x_n = 1 - \frac{1}{n} \implies x_n \rightarrow 1$ .  $f(x_n) = (1 - \frac{1}{n})^2 \rightarrow 1 \neq 0 = f(1) \implies f$  ist in  $x_0 = 1$  nicht stetig.

$x_0 = 2$ : Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $D$  mit  $x_n \rightarrow 2 \implies x_n = 2$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) = 1$  ffa  $n \in \mathbb{N} \implies f(x_n) \rightarrow 1 = f(2)$ . Das heißt:  $f$  ist stetig in  $x_0 = 2$ .

- (2)  $D := [0, \infty)$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ,  $f(x) := \sqrt[p]{x}$ , §16  $\implies f \in C[0, \infty)$ .

## Satz 17.1 (Stetigkeitssätze)

- (1)  $f$  ist stetig in  $x_0 \iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \forall x \in D_\delta(x_0)$ .
- (2) Ist  $x_0$  Häufungspunkt von  $D$ , so gilt:  $f$  ist stetig in  $x_0 \iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert und ist gleich  $f(x_0)$ .
- (3) Ist  $g : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine weitere Funktion und sind  $f, g$  stetig in  $x_0$ , dann sind  $f + g, fg$  und  $|f|$  stetig in  $x_0$ .
- (4) Sei  $\tilde{D} := \{x \in D : f(x) \neq 0\}$  und  $x_0 \in \tilde{D}$  und  $f$  sei stetig in  $x_0$ . Dann ist  $\frac{1}{f} : \tilde{D} \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$ .

## Beweis

- (1) Wie bei 16.1
- (2) Als Übung
- (3) und

(4) wie bei 16.2 ■**Satz 17.2 (Stetigkeit der Potenzreihen)**

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  sei Potenzreihe mit dem Konvergenzradius  $r > 0$ . Es sei  $D = (-r, r)$  und  $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  ( $x \in D$ ). Dann:  $f \in C(D)$ . Insbesondere gilt für  $x_0 \in D$ :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{17.1(2)}{=} f(x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} a_n x^n$$

**Beweis**Später in §19 ■**Beispiel 17.3**(1)  $e^x, \sin x, \cos x$  sind auf  $\mathbb{R}$  stetig.

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

(4)  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0}.$

**Beweis**

(1) Folgt aus 17.2

(2) Für  $x \neq 0$ :

$$\frac{1}{x} \sin x = \frac{1}{x} \cdot \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \right) = 1 - \underbrace{\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots}_{\text{Potenzreihe mit KR } \infty, \text{ also stetig (in } x=0)} \stackrel{17.2}{\rightarrow} 1 \quad (x \rightarrow 0)$$

(3) Für  $x \neq 0$ :

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x} \cdot \left( 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots - 1 \right) = 1 + \underbrace{\frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots}_{\text{Potenzreihe mit KR } \infty, \text{ also stetig (in } x=0)} \stackrel{17.2}{\rightarrow} 1 \quad (x \rightarrow 0)$$

(4)  $\frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \frac{e^h - 1}{h} \stackrel{(3)}{\rightarrow} e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0} \quad (h \rightarrow 0)$  ■

**Satz 17.4 (Stetigkeit von verketteten stetigen Funktionen)**

Sei  $E \subseteq \mathbb{R}$ ,  $g: E \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $f(D) \subseteq E$ .  $f$  sei stetig in  $x_0 \in D$  und  $g$  sei stetig in  $y_0 := f(x_0)$ . Dann ist  $g \circ f: D \rightarrow \mathbb{R}$  stetig in  $x_0$ .

**Beweis**

Sei  $(x_n)$  eine Folge in  $D$  mit  $x_n \rightarrow x_0$ .  $f$  ist stetig in  $x_0 \implies \underbrace{f(x_n)}_{=:y_n} \rightarrow f(x_0) = y_0$ .  $g$  stetig in

$$y_0 \implies \underbrace{g(y_n)}_{=g(f(x_n))=(g \circ f)(x_n)} \rightarrow g(y_0) = g(f(x_0)) = (g \circ f)(x_0). \quad \blacksquare$$

# 18. Eigenschaften stetiger Funktionen

## Satz 18.1 (Zwischenwertsatz)

Sei  $a < b$  und  $f \in C[a, b] := C([a, b])$ , weiter sei  $y_0 \in \mathbb{R}$  und  $f(a) \leq y_0 \leq f(b)$  oder  $f(b) \leq y_0 \leq f(a)$ . Dann existiert ein  $x_0 \in [a, b]$  mit  $f(x_0) = y_0$

### Beweis

O.B.d.A:  $f(a) < y_0 < f(b)$ ,  $M := \{x \in [a, b] : f(x) \leq y_0\}$ .  $M \neq \emptyset$ , denn  $a \in M$ .  $M \subseteq [a, b] \implies M$  ist beschränkt.  $x_0 := \sup M$ .  $\forall n \in \mathbb{N}$  ist  $x_0 - \frac{1}{n}$  keine obere Schranke von  $M \implies \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in M : x_0 - \frac{1}{n} < x_n \leq x_0 \implies x_n \rightarrow x_0$ .  $x_n \in [a, b] \implies x_0 \in [a, b]$ ,  $f$  stetig in  $x_0 \implies \underbrace{f(x_n)}_{\leq y_0} \rightarrow f(x_0) \implies f(x_0) \leq y_0$ . Es ist  $x_0 < b$  (anderenfalls:  $f(x_0) \leq y_0 < f(b) = f(x_0)$ )

Widerspruch!)  $z_n := x_0 + \frac{1}{n}; z_n \in [a, b]$  ffa  $n \in \mathbb{N}; z_n \rightarrow x_0; f$  stetig in  $x_0 \implies f(z_n) \rightarrow f(x_0)$ .  $z_n \notin M \implies f(z_n) > y_0 \forall n \in \mathbb{N} \implies \lim f(z_n) \geq y_0 \implies f(x_0) \geq y_0$  ■

## Satz 18.2 (Nullstellensatz von Bolzano)

Sei  $f \in C[a, b]$  und  $f(a) \cdot f(b) < 0$ , dann existiert ein  $x_0 \in [a, b] : f(x_0) = 0$ . Beweis folgt aus 18.1 und  $y_0 = 0$

### Anwendung 18.3

Sei  $E(x) := e^x (x \in \mathbb{R})$ . Behauptung:  $E(\mathbb{R}) = (0, \infty)$

### Beweis

13.3  $\implies e^x > 0 \forall x \in \mathbb{R} \implies E(\mathbb{R}) \subseteq (0, \infty)$ . Sei  $y_0 \in (0, \infty)$  z.z.:  $\exists x_0 \in \mathbb{R} : e^{x_0} = y_0$ . 16.3  $\implies e^x \rightarrow \infty (x \rightarrow \infty) \implies \exists b \in \mathbb{R} : y_0 < e^b$ . 16.3  $\implies e^x \rightarrow 0 (x \rightarrow -\infty) \implies \exists a \in \mathbb{R} : e^a < y_0 \implies e^a < y_0 < e^b \xrightarrow{\text{e streng wachsend}} a < b$ . 18.1  $\implies \exists x_0 \in [a, b] : e^{x_0} = y_0$ . ■

### Definition

$A \subseteq \mathbb{R}$  heißt **abgeschlossen** :  $\iff$  für jede konvergente Folge  $(x_n)$  in  $A$  gilt:  $\lim x_n \in A$

$B \subseteq \mathbb{R}$  heißt **offen** :  $\iff \forall x \in B \exists \delta = \delta(x) > 0 : U_\delta(x) \subseteq B$ .

### Beispiele:

- (1)  $[a, b]$  ist abgeschlossen, aber nicht offen.  $(a, b)$  ist offen, aber nicht abgeschlossen.
- (2)  $(a, b]$  und  $[a, b)$  sind weder abgeschlossen, noch offen
- (3)  $\mathbb{R}$  ist offen, abgeschlossen.  $\emptyset$  ist offen, abgeschlossen

**Hilfssatz**

- (1)  $A \subseteq \mathbb{R}$  ist abgeschlossen  $\iff$  jeder Häufungspunkt von  $A$  gehört zu  $A$
- (2)  $B \subseteq \mathbb{R}$  ist offen  $\iff \mathbb{R} \setminus B$  ist abgeschlossen
- (3)  $D \subseteq \mathbb{R}$  ist abgeschlossen u. beschränkt  $\iff$  jede Folge  $(x_n)$  in  $D$  enthält eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$  mit  $\lim x_{n_k} \in D$ . In diesem Fall existiert  $\max D$  und  $\min D$ .

**Beweis**

- (1) Übung
- (2) „ $\implies$ “: Sei  $(x_n)$  eine konvergente Folge in  $\mathbb{R} \setminus B$  und  $x_0 := \lim x_n$ . Annahme:  $x_0 \in B$ .  $B$  offen  $\implies \exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq B$ .  $x_n \rightarrow x_0 \implies x_n \in U_\delta(x_0) \subseteq B$  ffa  $n \in \mathbb{N}$ , Widerspruch!  
 „ $\impliedby$ “: Sei  $x \in B$ . Annahme:  $U_\delta(x) \not\subseteq B \forall \delta > 0$ .  $\implies U_{\frac{1}{n}}(x) \not\subseteq B \forall n \in \mathbb{N} \implies \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in U_{\frac{1}{n}}(x)$  mit:  $x_n \in \mathbb{R} \setminus B \implies (x_n)$  ist eine Folge in  $\mathbb{R} \setminus B : x_n \rightarrow x$ .  $\mathbb{R} \setminus B$  abgeschlossen  $\implies x \in \mathbb{R} \setminus B$ , Widerspruch!
- (3) „ $\implies$ “: Sei  $(x_n)$  Folge in  $D$ .  $D$  beschränkt  $\implies (x_n)$  beschränkt. 8.2  $\implies (x_n)$  enthält eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$ .  $D$  abgeschlossen  $\implies \lim x_{n_k} \in D$ . „ $\impliedby$ “: Übung.  
 Sei  $D$  beschränkt und abgeschlossen. Sei  $s := \sup D$ . z.z.:  $s \in D$  (analog zeigt man  $\inf D \in D$ ).  $\forall n \in \mathbb{N}$  ist  $s - \frac{1}{n}$  keine obere Schranke von  $s$ .  $\implies \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in D$  mit  $s - \frac{1}{n} < x_n \leq s \implies x_n \rightarrow s$ .  $D$  abgeschlossen  $\implies s \in D$  ■

**Definition**

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ . Eine Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  heißt **beschränkt** :  $\iff f(D)$  ist beschränkt ( $\iff \exists c \geq 0 : |f(x)| \leq c \forall x \in D$ ).

**Satz 18.4 (Eigenschaften von Bildmengen stetiger Funktionen)**  
 Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ , sei  $D$  beschränkt, abgeschlossen und  $f \in C(D)$ . Dann ist  $f(D)$  beschränkt und abgeschlossen. Insbesondere ist  $f$  beschränkt und  $\exists x_1, x_2 \in D : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \forall x \in D$ .

**Beweis**

Annahme:  $f$  ist nicht beschränkt. Dann:  $\forall n \in \mathbb{N} \exists x_n \in D : |f(x_n)| > n$ . HS(3)  $\implies (x_n)$  enthält eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$  mit  $x_0 := \lim x_{n_k} \in D$ .  $f$  stetig  $\implies f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0) \implies (f(x_{n_k}))$  ist beschränkt, aber:  $|f(x_{n_k})| > n_k \forall k \in \mathbb{N}$ , Widerspruch! Sei  $(y_n)$  eine konvergente Folge in  $f(D)$  und  $y_0 := \lim y_n$ . z.z.:  $y_0 \in f(D)$ .  $\exists$  Folge  $(x_n)$  mit  $f(x_n) = y_n \forall n \in \mathbb{N}$ . HS(e)  $\implies (x_n)$  enthält eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k})$  mit  $x_0 := \lim x_{n_k} \in D$ .  $f$  stetig  $\implies \underbrace{f(x_{n_k})}_{=y_{n_k}} \rightarrow f(x_0)$ . Aber auch:  $y_{n_k} \rightarrow y_0 = f(x_0) \in f(D)$  ■

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  streng monoton wachsend (*fallend*)  $\implies f$  ist auf  $I$  injektiv.  $\implies \exists f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ .  $f^{-1}$  ist streng monoton wachsend (*fallend*). Es gilt:  $f^{-1}(f(x)) = x \forall x \in I$ ,  $f(f^{-1}(y)) = y \forall y \in f(I)$  Übung: Sei  $M \subseteq \mathbb{R}$ .  $M$  ist ein Intervall :  $\iff$  aus  $a, b \in M$  und  $a \leq b$  folgt stets  $[a, b] \subseteq M$ .

**Satz 18.5 (Bildintervalle und Umkehrbarkeit stetiger, monotoner Funktionen)**

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f \in C(I)$ .

- (1)  $f(I)$  ist ein Intervall
- (2) Ist  $f$  streng monoton wachsend (*fallend*)  $\implies f^{-1} \in C(f(I))$

**Beweis**

(1) Übung (mit obiger Übung und 18.1)

(2) O.B.d.A:  $I = [a, b]$ .  $\alpha := f(a), \beta := f(b) \xrightarrow{f \text{ wachsend}} f(I) = [\alpha, \beta]$ . Sei  $x_0 \in [\alpha, \beta]$ . Sei  $(y_n)$  eine Folge in  $f(I)$  und  $y_n \rightarrow y_0$ . z.z.:  $f^{-1}(y_n) \rightarrow f^{-1}(y_0)$ .  $x_n := f^{-1}(y_n), x_0 := f^{-1}(y_0) \implies x_0 \in I, x_n \in I \forall n \in \mathbb{N}$ . d.h.  $(x_n)$  ist beschränkt. z.z.:  $x_n \rightarrow x_0$ . 8.2  $\implies \mathcal{H}(x_n) \neq \emptyset$ . Sei  $\alpha \in \mathcal{H}(x_n)$ .  $\exists$  eine Teilfolge  $(x_{n_k})$  von  $(x_n)$  mit  $x_{n_k} \rightarrow \alpha$ .  $I$  ist abgeschlossen  $\implies \alpha \in I$ .  $f$  stetig  $\implies \underbrace{f(x_{n_k})}_{=y_{n_k}} \rightarrow f(\alpha)$ . Aber auch:  $y_{n_k} \rightarrow y_0 = f(x_0) \implies f(\alpha) = f(x_0) \xrightarrow{f \text{ injektiv}} \alpha = x_0$ . d.h.  $\mathcal{H}(x_n) = \{x_0\}$ . Aus 9.3 folgt:  $x_n \rightarrow x_0$  ■

**Satz 18.6 (Der Logarithmus)**

Sei  $I = \mathbb{R}$  und  $f(x) = e^x$ . Bekannt:  $f \in C(\mathbb{R})$ ,  $f$  ist streng monoton wachsend und  $f(I) = f(\mathbb{R}) = (0, \infty)$ . Also existiert  $f^{-1} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\log x := \ln x := f^{-1}(x) \quad (x \in (0, \infty)) \quad \textit{Logarithmus}$$

**Eigenschaften**

- (1)  $\log 1 = 0, \log e = 1$
- (2)  $\log e^x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}, e^{\log x} = x \quad \forall x \in (0, \infty)$
- (3)  $x \mapsto \log x$  ist stetig auf  $(0, \infty)$  und streng monoton wachsend
- (4)  $\log(xy) = \log x + \log y; \log(\frac{x}{y}) = \log x - \log y \quad \forall x, y > 0$
- (5)  $\log x \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow \infty); \log x \rightarrow -\infty \quad (x \rightarrow 0^+)$
- (6)  $\log(a^r) = r \log a \quad \forall a > 0 \quad \forall r \in \mathbb{Q}$  d.h.  
 $a^r = e^{r \log a} \quad \forall a > 0 \quad \forall r \in \mathbb{Q}$

**Beweis**

- (1) klar (2) klar (3) 18.5
- (4)  $e^{\log xy} = xy = e^{\log x} e^{\log y} = e^{\log x + \log y} \implies \log(xy) = \log(x) + \log(y)$
- (5) folgt aus 16.3

$$\begin{aligned}
(6) \text{ Sei } a > 0, n, m \in \mathbb{N}. \log(a^n) &\stackrel{4}{=} n \log a. \log(a^{-n}) = \log\left(\frac{1}{a^n}\right) \stackrel{4}{=} \log 1 - \log a^n = -n \log a \\
\log a = \log\left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n\right) &= n \log a^{\frac{1}{n}} \implies \log a^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n} \log a \\
\log\left(a^{\frac{m}{n}}\right) = \log\left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m\right) &= m \log\left(a^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{m}{n} \log a \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

**Definition (Die allgemeine Potenz)**

Sei  $a > 0$ . Motiviert durch 18.6(6):  $a^x = e^{x \log a}$  ( $x \in \mathbb{R}$ )

**Eigenschaften**

- (1)  $x \rightarrow a^x$  ist auf  $\mathbb{R}$  stetig
- (2)  $a^{x+y} = a^x a^y$ ;  $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$ ,  $a^{-x} = \frac{1}{a^x} \forall x, y \in \mathbb{R}$ .
- (3)  $\log(a^x) = x \cdot \log a$

**Beweis**

- (1) Klar
- (2)  $a^{x+y} = e^{(x+y) \log a} = e^{x \log a} \cdot e^{y \log a} = a^x a^y$
- (3)  $\log(a^x) = \log(e^{x \cdot \log a}) = x \cdot \log a \quad \blacksquare$

In der Übung:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = e$

# 19. Funktionsfolgen und -reihen

In diesem Paragraphen seien:  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$  und  $(f_n)$  sei eine **Folge von Funktionen**.  $f_n : D \rightarrow \mathbb{R}$ .  $s_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Unter  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  versteht man die Folge  $(s_n)$ .  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  heißt **Funktionsreihe**.

## Definition

$(f_n)$  heißt auf  $D$  **punktweise konvergent** :  $\iff$  für jedes  $x \in D$  ist  $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$  konvergent. In diesem Fall heißt  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  die Grenzfunktion von  $f_n$ .

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  heißt auf  $D$  **punktweise konvergent** :  $\iff$  für jedes  $x \in D$  ist  $(s_n(x))_{n=1}^{\infty}$  konvergent. In diesem Fall heißt  $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  die Summenfunktion von  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ .

## Beispiele:

- (1)  $D = [0, 1]$ ,  $f_n(x) = x^n$  ( $x \in D, n \in \mathbb{N}$ )

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in [0, 1) \\ 1, & \text{falls } x = 1 \end{cases} =: f(x)$$

$(f_n)$  konvergiert punktweise auf  $D$  gegen  $f$ .

- (2)  $D = (0, \infty)$ ,  $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} = \frac{\frac{x}{n}}{\frac{1}{n^2}+x^2} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ )  $\forall x \in D$ . Das heißt:  $(f_n)$  konvergiert auf  $D$  punktweise gegen  $f(x) = 0$ .

Übung:  $0 \leq f_n \leq \frac{1}{2} \forall n \in \mathbb{N}$ ,  $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2} \forall n \in \mathbb{N}$ .

- (3) Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r > 0$ ,  $D := (-r, r)$ ,  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  ( $x \in D$ ).  $(f_n(x) = a_n x^n)$ .  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  konvergiert auf  $D$  punktweise gegen  $f$

Konvergiert  $(f_n)$  auf  $D$  punktweise gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ , so bedeutet dies: Ist  $\varepsilon > 0$  und  $x \in D$ , so existiert ein  $n_0 = n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ :  $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \forall n \geq n_0$

## Definition

$(f_n)$  heißt auf  $D$  **gleichmäßig konvergent** :  $\iff \exists$  Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  für die gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in D: |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  heißt auf  $D$  **gleichmäßig konvergent** :  $\iff \exists$  Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  für die gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 \forall x \in D: |s_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Klar: gleichmäßige Konvergenz  $\implies$  punktweise Konvergenz. ( $\Leftarrow$  ist im Allgemeinen falsch)

**Bemerkung:**  $(f_n)$  sei auf  $D$  punktweise konvergent gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$

$(f_n)$  konvergiert auf  $D$  gleichmäßig gegen  $f$  :  $\iff \exists m \in \mathbb{N} : f_n - f$  ist auf  $D$  beschränkt  $\forall n \geq m$  und für  $M_n := \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in D\}$  ( $n \geq m$ ) gilt  $M_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ )

**Beispiele:**

- (1)  $D, f_n$  und  $f$  seien wie in obigem Beispiel (1).  $f_n(\frac{1}{\sqrt{2}}) = \frac{1}{2} \forall n \in \mathbb{N}$ .  $f_n - f$  ist beschränkt auf  $D \forall n \in \mathbb{N}$ .  $|f_n(\frac{1}{\sqrt{2}}) - f(\frac{1}{\sqrt{2}})| = \frac{1}{2} \forall n \in \mathbb{N} \implies M_n \geq \frac{1}{2} \forall n \in \mathbb{N} \implies M_n \not\rightarrow 0 \implies (f_n)$  konvergiert nicht gleichmäßig auf  $D$ .
- (2) Sei  $0 < \alpha < 1, D := [0, \alpha], f_n(x) = x^n, (f_n)$  konvergiert auf  $D$  punktweise gegen  $f \equiv 0$ . Sei  $x \in D = [0, \alpha]$ .  $|f_n(x) - f(x)| = x^n \leq \alpha^n \implies M_n = \alpha^n. \alpha < 1 \implies \alpha^n \rightarrow 0 \implies M_n \rightarrow 0$ . Das heißt  $(f_n)$  konvergiert auf  $[0, \alpha]$  gleichmäßig gegen  $f$ .
- (3)  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$  konvergiert auf  $D = (-1, 1)$  punktweise gegen  $f(x) := \frac{1}{1-x}$ .  $s_n(x) = 1 + x + \dots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ .  $|s_n(x) - f(x)| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow 1} \infty \implies s_n - f$  ist auf  $D$  nicht beschränkt  $\forall n \in \mathbb{N} \implies \sum_{n=0}^{\infty} x^n$  konvergiert auf  $D$  nicht gleichmäßig.

**Satz 19.1 (Funktionskonvergenzkriterien)**

- (1)  $f_n$  konvergiert auf  $D$  punktweise gegen  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ .  $(f_n)$  konvergiert auf  $D$  gleichmäßig gegen  $f : \iff \exists$  Nullfolge  $(\alpha_n) \in \mathbb{R}$  und ein  $m \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| \leq \alpha_n \forall n \geq m \forall x \in D$ .
- (2) **Kriterium von Weierstraß:** Sei  $(c_n)$  eine Folge in  $\mathbb{R}$  sei  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$  konvergent, sei  $m \in \mathbb{N}$  und es gelte:  $(*) |f_n(x)| \leq c_n \forall n \geq m \forall x \in D$ . Dann konvergiert  $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$  auf  $D$  gleichmäßig.
- (3) Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r > 0, D := (-r, r)$  und  $[a, b] \subseteq D$ . Dann konvergiert die Potenzreihe auf  $[a, b]$  gleichmäßig.

**Beweis**

- (1) Klar
- (2) Aus  $(*)$  und 12.2 folgt:  $\forall x \in D$  ist  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$  absolut konvergent.  $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ .  $|f_n(x) - f(x)| = |\sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k =: \alpha_n \forall n \geq m \forall x \in D$ .  
11.1  $\implies \alpha_n \rightarrow 0 \xrightarrow{(1)}$  Behauptung.
- (3) Sei  $\delta > 0$  so, dass  $[a, b] \subseteq [-\delta, \delta] \subseteq D$ . Sei  $x \in [a, b] \implies |x| \leq \delta \implies |a_n x^n| = |a_n| |x^n| \leq |a_n| \delta^n =: c_n \forall n \in \mathbb{N}$ .  $\sum c_n = \sum |a_n| \delta^n$  ist konvergent  $\xrightarrow{(2)}$  Behauptung. ■

**Satz 19.2 (Stetigkeit bei gleichmäßiger Konvergenz)**

$(f_n)$  konvergiert auf  $D$  gleichmäßig gegen  $f$ .

- (1) Ist  $x_0 \in D$  und sind alle  $f_n$  stetig in  $x_0 \implies f$  ist stetig in  $x_0$
- (2) Gilt  $f_n \in C(D) \forall n \in \mathbb{N} \implies f \in C(D)$

**Bemerkung:** Voraussetzung und Bezeichnungen wie in 19.2. Sei  $x_0$  auch noch Häufungspunkt von  $D$ .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \stackrel{13.1(1)}{=} f(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x))$$

**Beweis**

(1) Sei  $\varepsilon > 0$ .  $\exists m \in \mathbb{N} : |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \forall x \in D$  (i).

17.1  $\implies \exists \delta > 0 : |f_m(x) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$  (ii).

Für  $x \in D \cap U_\delta(x_0) : |f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_m(x) + f_m(x) - f_m(x_0) + f_m(x_0) - f(x_0)| \leq$

$$\underbrace{|f(x) - f_m(x)|}_{\stackrel{(i)}{\leq} \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_m(x) - f_m(x_0)|}_{\stackrel{(ii)}{\leq} \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{|f_m(x_0) - f(x_0)|}_{\stackrel{(i)}{\leq} \frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon. \quad 17.1 \implies f \text{ stetig in } x_0.$$

(2) Folgt aus (1) ■

**Beweis (Nachtrag: Beweis von 17.2)**

17.2:  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  sei eine Potenzreihen mit Konvergenzradius  $> 0$ ,  $D := (-r, r)$ .  $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ . Behauptung:  $f \in C(D)$ . Sei  $x_0 \in D$ . Sei  $[a, b]$  so, dass  $x_0 \in [a, b] \subseteq D$ . 19.1(3)  $\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  konvergiert auf  $[a, b]$  gleichmäßig.  $\implies f \in C[a, b] \implies f$  ist stetig in  $x_0$ .  $x_0 \in D$  beliebig  $\implies$  Behauptung ■

**Satz 19.3 (Identitätssatz für Potenzreihen)**

Sei  $r > 0$ ,  $D := (-r, r)$ , ( $r = \infty$  zugelassen).  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  und  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  seien Potenzreihen, die auf  $D$  konvergieren.  $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ,  $g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  ( $x \in D$ ) Weiter sei  $x_k$  eine Folge in  $D \setminus \{0\}$  mit  $x_k \rightarrow 0$  ( $k \rightarrow \infty$ ) und  $f(x_k) = g(x_k) \forall k \in \mathbb{N}$ . Dann:  $a_n = b_n \forall n \in \mathbb{N}_0$

**Beweis**

$$h(x) := f(x) - g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(a_n - b_n)}_{:=c_n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n. \quad \text{z.z: } c_n = 0 \forall n \in \mathbb{N}_0. \quad \underbrace{h(x_k)}_{=0} \xrightarrow{17.2} h(0) =$$

$$c_0 \implies c_0 = 0.$$

Annahme:  $\exists n \in \mathbb{N} : c_n \neq 0$ .  $m := \min\{n \in \mathbb{N} : c_n \neq 0\}$ . Also:  $c_m \neq 0$ ,  $c_1, \dots, c_{m-1} = 0 \implies$

$$h(x) = c_m x^m + c_{m+1} x^{m+1} + \dots. \quad \text{Für } x \in D \setminus \{0\} : \frac{h(x)}{x^m} = \underbrace{c_m + c_{m+1} x + c_{m+2} x^2 + \dots}_{\text{Potenzreihen, die auf D konvergieren}} \xrightarrow{17.2}$$

$$c_m(x \rightarrow \infty) \implies \underbrace{\frac{h(x_k)}{x_k^m}}_{=0} \rightarrow c_m(k \rightarrow \infty) \implies c_m = 0, \text{ Widerspruch!} \quad \blacksquare$$

## 20. Gleichmäßige Stetigkeit

**Vereinbarung:** In diesem Paragraphen seien stets:  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}, f : D \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

**Erinnerung:** Sei  $f \in C(D), x_0 \in D$  und  $\varepsilon > 0$ . 17.1  $\implies \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0)$  mit: (\*)  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \forall x \in D$  mit  $|x - x_0| < \delta$  Im allgemeinen hängt  $\delta$  von  $\varepsilon$  und  $x_0$  ab.

### Definition

$f$  heißt auf  $D$  **gleichmäßig stetig**

:  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \underbrace{|f(x) - f(z)| < \varepsilon \forall x, z \in D \text{ mit } |x - z| < \delta}_{**}$

**Beachte:** Ist  $f$  gleichmäßig stetig auf  $D \implies f \in C(D)$ ; Die Umkehrung ist im allgemeinen falsch.

### Beispiel

$D = [0, \infty), f(x) := x^2$ . Klar:  $f \in C(D)$ . Annahme:  $f$  ist auf  $D$  gleichmäßig stetig. Dann existiert zu  $\varepsilon = 1$  ein  $\delta > 0 : |x^2 - z^2| < 1 \forall x, z \in D$  mit  $|x - z| < \delta$ . Sei  $x \in D$ .  $z := x + \frac{\delta}{2} \implies |x - z| = \frac{\delta}{2} \implies |x^2 - z^2| = |x + z||x - z| = (2x + \frac{\delta}{2})\frac{\delta}{2} = x\delta + \frac{\delta^2}{4} < 1 \implies x\delta < 1 \implies \delta < \frac{1}{x}$ . Also:  $\delta < \frac{1}{x} \forall x > 0 \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \delta \leq 0$ , Widerspruch!

### Definition

$f$  heißt auf  $D$  **Lipschitz-stetig** :  $\iff \exists L \geq 0: \underbrace{|f(x) - f(z)| \leq L|x - z|}_{(***)} \forall x, z \in D$

### Satz 20.1 (Stetigkeitsätze)

- (1) Ist  $f$  auf  $D$  Lipschitz-stetig  $\implies f$  ist auf  $D$  gleichmäßig stetig
- (2) Ist  $D$  beschränkt und abgeschlossen und  $f \in C(D) \implies f$  ist auf  $D$  gleichmäßig stetig (**Satz von Heine**).

### Beweis

- (1) Sei  $L \geq 0$  und es gelte (\*\*\*) . O.B.d.A.:  $L = 0$ . Sei  $\varepsilon > 0$ .  $\delta := \frac{\varepsilon}{L}$ . Seien  $x, z \in D$  und  $|x - z| < \delta \implies |f(x) - f(z)| \leq L|x - z| < L\delta = \varepsilon$
- (2) Annahme:  $f$  ist auf  $D$  nicht gleichmäßig stetig  $\implies \exists \varepsilon > 0 : (*)$  ist für kein  $\delta > 0$  richtig.  $\implies \forall \delta > 0 \exists x = x(\delta), z = z(\delta) \in D : |x - z| < \delta$  aber  $|f(x) - f(z)| \geq \varepsilon$ .  $\implies \forall n \in \mathbb{N} \exists x_n, z_n : |x_n - z_n| < \frac{1}{n}$ , aber  $|f(x_n) - f(z_n)| \geq \varepsilon$ .  $D$  beschränkt  $\implies (x_n)$  beschränkt  $\xrightarrow{8.2} (x_n)$  enthält eine konvergente Teilfolge  $(x_{n_k}), x_0 := \lim x_{n_k}$ .  $D$  abgeschlossen  $\implies x_0 \in D$ .  $|x_{n_k} - z_{n_k}| \leq \frac{1}{n_k} \forall k \in \mathbb{N} \implies z_{n_k} - x_{n_k} \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty) \implies z_{n_k} = z_{n_k} - x_{n_k} + x_{n_k} \rightarrow x_0$ .  $f$  stetig  $\implies |f(x_{n_k}) - f(z_{n_k})| \rightarrow |f(x_0) - f(z_0)| = 0$ . Widerspruch zu  $|f(x_{n_k}) - f(z_{n_k})| \geq \varepsilon \forall k \in \mathbb{N}$  ■

**Beispiel**

$D = [0, 1], f(x) := \sqrt{x}$ . Satz  $\implies f$  ist auf  $D$  gleichmäßig stetig. Annahme:  $\exists L > 0 : |\sqrt{x} - \sqrt{z}| \leq L|x - z| \forall x, z \in [0, 1] \implies \sqrt{x} \leq Lx \forall x \in [0, 1] \implies 1 \leq L\sqrt{x} \forall x \in (0, 1] \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \leq 0$ , Widerspruch!

# 21. Differenzierbarkeit

In diesem Paragraphen seien stets:  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

## Definition

- (1)  $f$  heißt in  $x_0 \in I$  **differenzierbar** (db) genau dann, wenn der  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  existiert und  $\in \mathbb{R}$  ist. ( $\iff \exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$  und ist  $\in \mathbb{R}$ ). In diesem Fall heißt  $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  die **Ableitung von  $f$  in  $x_0$** .
- (2)  $f$  heißt auf  $I$  differenzierbar genau dann, wenn  $f$  in jedem  $x \in I$  differenzierbar ist. In diesem Fall wird durch  $x \mapsto f'(x)$  eine Funktion  $f' : I \rightarrow \mathbb{R}$  definiert, die **Ableitung von  $f$  auf  $I$** .

## Beispiele:

- (1) Sei  $c \in \mathbb{R}$  und  $f(x) = c \forall x \in I$ .  $f$  ist differenzierbar auf  $I$ ,  $f'(x) = 0 \forall x \in I$ .
- (2) Sei  $I = \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  und  $f(x) = x^n$ . Seien  $x, x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 \neq x$ .  $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} \stackrel{\S 1}{=} x^{n-1} + x_0^{n-2}x + x^{n-3}x^2 + \dots + x_0x^{n-2} + x^{n-1} \rightarrow nx_0^{n-1} (x \rightarrow x_0)$ .  $f$  ist also differenzierbar auf  $\mathbb{R}$  und  $f'(x) = nx^{n-1} \forall x \in \mathbb{R}$ . Kurz:  $(x^n)' = nx^{n-1}$  auf  $\mathbb{R}$ .
- (3)  $I = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = |x|$ ,  $x_0 = 0$ .  $x \neq 0 : \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases} \implies f$  ist in  $x_0 = 0$  nicht differenzierbar. (Beachte:  $f$  ist stetig in  $x_0$ )
- (4)  $I = \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x$ . 17.3  $\implies \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0} \forall x_0 \in \mathbb{R}$ . Kurz:  $(e^x)' = e^x$ .

### Satz 21.1 (Differenzierbarkeit und Stetigkeit)

Ist  $f$  differenzierbar in  $x_0 \in I$ , so ist  $f$  stetig in  $x_0$

## Beweis

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0) \xrightarrow{x \rightarrow x_0} f'(x_0) \cdot 0 = 0 (x \rightarrow x_0) \implies \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \blacksquare$$

### Satz 21.2 (Ableitungsregeln)

$g : I \rightarrow \mathbb{R}$  sei eine weitere Funktion,  $f$  und  $g$  ableitbar in  $x_0 \in I$ .

- (1) Für  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  ist  $\alpha f + \beta g$  differenzierbar in  $x_0$  und

$$(\alpha f + \beta g)'(x_0) = \alpha f'(x_0) + \beta g'(x_0)$$

(2)  $fg$  ist differenzierbar in  $x_0$  und

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

(3) Es sei  $g(x) \neq 0 \forall x \in I$ .  $\frac{f}{g}$  differenzierbar in  $x_0$  und

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$$

**Beweis**

(1) Klar. Für (2) und (3) beachte:  $f(x) \rightarrow f(x_0), g(x) \rightarrow g(x_0) (x \rightarrow x_0)$  (wegen 21.1)

$$(2) \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}f(x_0) \rightarrow f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0) (x \rightarrow x_0)$$

$$(3) h := \frac{f}{g} : \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{g(x)g(x_0)} \left( \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}g(x_0) - \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}f(x_0) \right) \rightarrow \frac{1}{g(x_0)^2} (f'(x_0)g(x_0) - g'(x_0)f(x_0)) (x \rightarrow x_0). \blacksquare$$

**Beispiele:**

(1)  $f(x) = e^{-x} = \frac{1}{e^x}, f'(x) = \frac{-e^x}{(e^x)^2} = -\frac{1}{e^x} = -e^{-x} \forall x \in \mathbb{R}$

(2)  $(\cosh x)' = \left(\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right)' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \sinh x$  auf  $\mathbb{R}$ .  
 $(\sinh x)' = \left(\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right)' = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \cosh x$  auf  $\mathbb{R}$ .

**Satz 21.3 (Kettenregel)**

Sei  $J \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall,  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktionen und  $g(J) \subseteq I$ . Weiter sei  $g$  differenzierbar in  $x_0 \in J$  und  $f$  differenzierbar in  $y_0 := g(x_0)$ . Dann ist  $f \circ g : J \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar in  $x_0$  und  $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$

**Beweis**

$$h(y) = \begin{cases} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} & , y \in I \setminus \{y_0\} \\ f'(y_0) & , y = y_0 \end{cases} \text{ ist differenzierbar in } y_0 \implies h(y) \rightarrow f'(y) = f'(g(x)) (y \rightarrow y_0).$$

21.1  $\implies g(x) \rightarrow g(x_0) = y_0 (x \rightarrow x_0) \implies h(g(x)) \rightarrow f'(g(x_0))$  Es ist  $f(y) - f(y_0) = h(y)(y - y_0) \forall y \in I \implies \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} = h(g(x)) \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \rightarrow f'(g(x_0))g'(x_0) (x \rightarrow x_0) \blacksquare$

**Beispiele:**

(1) Sei  $I = \mathbb{R}, a > 0, a^x = e^{x \log a} = f(g(x))$  mit  $f(x) = e^x, g(x) = x \log a \implies (a^x)' = f'(g(x))g'(x) = e^{x \log a} \log a = a^x \log a$  auf  $\mathbb{R}$

(2)  $I = [0, \infty), f(x) = x^2, f'(x) = 2x, f'(0) = 0$   
 $f^{-1}(x) = \sqrt{x} (x \in [0, \infty)).$

Es gilt:  $x = f(f^{-1}(x)) (*) \forall x \geq 0$  Annahme:  $f^{-1}$  ist differenzierbar in  $x_0 = 0 \xrightarrow{21.3, (*), x_0 = 0} 1 = \underbrace{f'(f^{-1}(0))}_{=0} \cdot (f^{-1})'(0) = 0$  Widerspruch!

Das heißt  $f^{-1}(x_0)$  ist in  $x_0 = 0$  nicht differenzierbar.

**Satz 21.4 (Ableitung der Umkehrfunktion)**

$f \in C(I)$  sei streng monoton,  $f$  differenzierbar in  $x_0 \in I$  und  $f'(x_0) \neq 0$ . Dann ist  $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$  differenzierbar in  $y_0 := f(x_0)$  und  $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

**Beweis**

Sei  $(y_n)$  eine Folge in  $f(I) \setminus \{y_0\}$  und  $y_n \rightarrow y_0$  und  $\alpha_n = \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(y_0)}{y_n - y_0}$ . Zu zeigen:  $\alpha_n \rightarrow \frac{1}{f'(x_0)}$  ( $n \rightarrow \infty$ )  
 $x_n := f^{-1}(y_n) \implies y_n = f(x_n), x_n \in I, \forall n \in \mathbb{N} \implies \alpha_n = \frac{x_n - x_0}{f(x_n) - f(x_0)} \rightarrow \frac{1}{f'(x_0)}$  ( $n \rightarrow \infty$ ) ■

**Beispiele:**

(1)  $I = \mathbb{R}, f(x) = e^x, f^{-1}(y) = \log y$  ( $y > 0$ ). Sei  $y > 0$ , also  $y = e^x$  ( $x \in \mathbb{R}$ )  $\implies (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$ . Kurz:  $(\log x)' = \frac{1}{x}$  auf  $(0, \infty)$ .

(2) Sei  $\alpha \in \mathbb{R}$  und  $f(x) = x^\alpha$  ( $x > 0$ ), dann:  $f(x) = e^{\alpha \log x} \implies f'(x) = e^{\alpha \log x} \cdot (\alpha \log x)' = x^\alpha \cdot \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$ . Kurz:  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$  auf  $(0, \infty)$

(3) Für  $\alpha = \frac{1}{2}$  liefert Beispiel (2):  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  auf  $(0, \infty)$

**Definition**

Zu  $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}$  und  $x_0 \in M$ .  $x_0$  heißt ein **innerer Punkt** von  $M$  genau dann, wenn es ein  $\delta > 0$  gibt, so dass  $U_\delta(x_0) \subseteq M$ .

**Beispiele:**

(1)  $M$  ist offen genau dann, wenn jedes  $x \in M$  ein innerer Punkt von  $M$  ist.

(2) Sei  $a < b, M \in \{[a, b], (a, b), [a, b), (a, b]\}$ .  $x_0 \in M$  ist innerer Punkt von  $M$  genau dann, wenn  $x_0 \in (a, b)$

(3)  $\mathbb{Q}$  hat keine inneren Punkte

**Definition**

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D$ ,  $g$  hat in  $x_0$  ein **relatives Maximum** :  $\iff \exists \delta > 0 : g(x) \leq g(x_0) \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$ .

Sei  $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in D$ ,  $g$  hat in  $x_0$  ein **relatives Minimum** :  $\iff \exists \delta > 0 : g(x) \geq g(x_0) \forall x \in D \cap U_\delta(x_0)$ .

Ein **relatives Extremum** ist ein relatives Maximum oder Minimum.

**Satz 21.5 (Erste Ableitung am relativen Extremum)**

$f$  sei differenzierbar in  $x_0 \in I$ ,  $f$  habe in  $x_0$  ein relatives Extremum und  $x_0$  sei ein innerer Punkt von  $I$ . Dann gilt:  $f'(x_0) = 0$ .

**Beweis**

$f$  habe in  $x_0$  ein relatives Maximum. Dann existiert  $\delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq I$  und  $f(x) \leq f(x_0) \forall x \in U_\delta(x_0)$ .

$$\text{Sei } x \in U_\delta(x_0) \text{ und } x < x_0 \implies \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \implies f'(x_0) \quad (x \rightarrow x_0-) \\ > \qquad \qquad \qquad \leq \qquad \qquad \qquad (x \rightarrow x_0+)$$

Also:  $f'(x_0) = 0$ . ■

**Bemerkungen:**

- (1) Die Voraussetzung „ $x_0$  ist ein innerer Punkt von  $I$ “ ist wesentlich. Beispiel:  $f(x) = x$ ,  $x \in [0, 1]$ ,  $x_0 = 0$  oder  $x_0 = 1$ .
- (2) Ist  $f$  differenzierbar in  $x_0$  und  $f'(x_0) = 0$ , so muss  $f$  in  $x_0$  *kein* relatives Extremum haben. Beispiel:  $f(x) = x^3$ ,  $x_0 = 0$ .

**Satz 21.6 (Mittelwertsatz der Differenzialrechnung)**

Sei  $I = [a, b]$  ( $a < b$ ),  $f, g \in C(I)$  und  $f$  und  $g$  seien differenzierbar auf  $(a, b)$ . Weiter sei  $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$ .

- (1) **Satz von Rolle:** Es sei  $f(a) = f(b)$ . Dann existiert  $\xi \in (a, b)$  :

$$f'(\xi) = 0.$$

- (2) **Mittelwertsatz (MWS) der Differenzialrechnung:**

$$\exists \xi \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi).$$

- (3) **Erweiterter Mittelwertsatz:** Es ist  $g(b) \neq g(a)$  und  $\exists \xi \in (a, b)$  :

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

**Beweis**

- (1) 18.3  $\implies \exists s, t \in [a, b] : f(s) \leq f(x) \leq f(t) \forall x \in [a, b]$ .

Fall 1:  $s, t \in \{a, b\} \implies f$  ist auf  $I$  konstant  $\implies f' = 0$  auf  $I \implies$  Beh.

Fall 2:  $s \in (a, b)$  oder  $t \in (a, b)$ . Etwa:  $s \in (a, b) \implies s$  ist ein innerer Punkt von  $I$  und  $f$  hat in  $s$  ein Minimum. 21.5  $\implies f'(s) = 0$ .

- (2) folgt aus (3) mit  $g(x) = x$ .

- (3)  $h(x) := (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x)$  ( $x \in I$ ). Dann gilt:  $h \in C(I)$ ,  $h$  ist differenzierbar auf  $(a, b)$ .

$$h(a) = h(b) \stackrel{(1)}{\implies} \exists \xi \in (a, b) : 0 = h'(\xi) = (f(b) - f(a))g'(\xi) - (g(b) - g(a))f'(\xi)$$

$$\implies (f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi).$$

Aus (1) folgt:  $g(a) \neq g(b)$  (sonst existierte  $x_0 \in (a, b)$  mit  $g'(x_0) = 0$ ).

$$\implies \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

■

**Folgerungen 21.7**

$f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  seien differenzierbar auf  $I$ .

- (1) Ist  $f' = 0$  auf  $I \implies f$  ist auf  $I$  konstant  
 $\geq$  wachsend  
 $\leq$  fallend  
 $>$  streng wachsend  
 $<$  streng fallend

- (2) Ist  $f' = g'$  auf  $I \implies \exists c \in \mathbb{R} : f = g + c$  auf  $I$ .

**Beweis**

- (1) Seien  $x_1, x_2 \in I$  und  $x_1 < x_2$ . 21.6 (2)  $\implies \exists \xi \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \implies$  Beh.

- (2)  $h := f - g \implies h' = 0$  auf  $I \xrightarrow{(1)}$  Beh.

■

**Beispiele:**

- (1) Es existiert genau ein  $x_0 \in \mathbb{R} : e^{-x_0} = x_0$ .

**Beweis**

$f(x) := e^{-x} - x$  ( $x \in \mathbb{R}$ )  $f(0) = 1 > 0$ ,  $f(1) = \frac{1}{e} - 1 < 0$ . 18.2  $\implies \exists x_0 \in (0, 1) : f(x_0) = 0$ , also:  $e^{-x_0} = x_0$ .

$f'(x) = -e^{-x} - 1 < 0 \forall x \in \mathbb{R} \xrightarrow{21.7}$   $f$  ist streng fallend  $\implies f$  hat genau eine Nullstelle, nämlich  $x_0$ .  $\implies$  Beh.

■

- (2) Ist  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar auf  $\mathbb{R}$  und  $f' = f$  auf  $\mathbb{R} \implies \exists c \in \mathbb{R} : f(x) = ce^x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ).

**Beweis**

$h(x) := \frac{f(x)}{e^x} \implies h'(x) = \frac{f'(x)e^x - e^x f(x)}{(e^x)^2} = 0 \forall x \in \mathbb{R} \xrightarrow{21.7} \exists c \in \mathbb{R} : h(x) = c \forall x \in \mathbb{R} \implies$  Beh.

■

**Satz 21.8 (Die Regeln von de l'Hospital)**

$f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  seien auf  $(a, b)$  differenzierbar und es sei  $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b)$  ( $a = -\infty$  oder  $b = \infty$  zugelassen). Weiter existiere  $L := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  ( $L = \pm\infty$  zugelassen) und es gelte

(I)  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \rightarrow b}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \rightarrow b}} g(x) = 0$  oder

(II)  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \rightarrow b}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \rightarrow b}} g(x) = \pm\infty$ .

Dann gilt:  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \rightarrow b}} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ .

**Beweis**

Nur unter der Voraussetzung (I) und nur für  $x \rightarrow a$ .

Fall 1:  $a \in \mathbb{R}$ .  $f(a) := g(a) := 0 \xrightarrow[21.1]{(I)} f, g \in C[a, b]$ .

Sei  $x \in (a, b)$ . 21.6 (3)  $\implies \exists \xi = \xi(x) \in (a, x) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \rightarrow L$  (für  $x \rightarrow a$ , da dann auch  $\xi \rightarrow a$ ).

Fall 2:  $a = -\infty$ . Substituiere  $x = \frac{1}{t}$ , also  $t = \frac{1}{x}$  ( $x \rightarrow a = -\infty \iff t \rightarrow 0-$ ).

$\varphi(t) := f(\frac{1}{t}) = f(x)$ ,  $\psi(t) := g(\frac{1}{t}) = g(x)$ . z.z.:  $\frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \rightarrow L$  ( $t \rightarrow 0-$ )

$$\varphi'(t) = f'(\frac{1}{t}) \cdot (-\frac{1}{t^2}) = f'(x) \cdot (-x^2)$$

$$\psi'(t) = g'(x) \cdot (-x^2)$$

$$\implies \frac{\varphi'(t)}{\psi'(t)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow L \quad (t \rightarrow 0-) \xrightarrow{\text{Fall 1}} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} \rightarrow L \quad (t \rightarrow 0-).$$

■

**Beispiele:**

$$(1) a, b > 0 : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \log a - b^x \log b}{1} = \log a - \log b$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{\log x}{x}} = e^0 = 1$$

$$(4) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\log(1+tz)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+tz} \cdot t}{1} = t \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$(5) \text{Für } t \in \mathbb{R} : \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{t}{x})^x = e^t \quad (\text{insbesondere } \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{t}{n})^n = e^t, n \in \mathbb{N})$$

**Beweis**

$$\varphi(x) := (1 + \frac{t}{x})^x.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \log \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \log(1 + \frac{t}{x}) \stackrel{z = \frac{1}{x}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1+tz)}{z} = t$$

$$\implies \varphi(x) \rightarrow e^t \quad (x \rightarrow \infty).$$

■

**Satz 21.9 (Ableitung von Potenzreihen)**

Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r > 0$ ,  $I := (x_0-r, x_0+r)$ , ( $I = \mathbb{R}$ , falls  $r = \infty$ ) und  $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  ( $x \in I$ )

(1) Die Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n(x-x_0)^{n-1}$  hat den Konvergenzradius  $r$ .

(2)  $f$  ist auf  $I$  differenzierbar und  $f'(x) := \sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \quad \forall x \in I$ , also  
 $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n (x - x_0)^n)'$

**Beweis**

(1)  $\limsup \sqrt[n]{|n a_n|} = \limsup \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \implies$  Behauptung.

(2) Später ■

**Beispiele:**

(1)  $(\sin x)' = \sum_{n=0}^{\infty} ((-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!})' = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$  auf  $\mathbb{R}$ .

(2)  $(\cos x)' = -\sin x$

**Satz 21.10 (Eigenschaften trigonometrischer Funktionen)**

(1)  $\forall x \in \mathbb{R} : \cos^2 x + \sin^2 x = 1, |\cos x| \leq 1, |\sin x| \leq 1, |\sin x| \leq |x|$

(2) Additionstheoreme:  $\forall x, y \in \mathbb{R} : \sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y, \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

(3)  $\sin x > x - \frac{x^3}{3!} > 0 \quad \forall x \in (0, 2)$ ; insbesondere:  $\sin 1 > \frac{5}{6}$ .

(4)  $\exists \xi_0 \in (0, 2)$  mit  $\cos \xi_0 = 0$  und  $\cos x \neq 0 \quad \forall x \in [0, \xi_0), \pi := 2\xi_0$  (Pi). Also:  $\pi \in (0, 4)$  ( $\pi \approx 3, 14..$ ),  $\cos \frac{\pi}{2} = 0, \cos x \neq 0 \quad \forall x \in [0, \frac{\pi}{2})$ .

(5)  $\sin \frac{\pi}{2} = 1$

(6)  $\sin(-x) = -\sin x, \quad \cos(-x) = \cos x$   
 $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x, \quad \cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$   
 $\sin(x + \pi) = -\sin x, \quad \cos(x + \pi) = -\cos x$   
 $\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$

(7) Für  $x \in [0, \pi] : \cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}$

(8)  $\sin x = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = k\pi.$   
 $\cos x = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z} : x = k\pi + \frac{\pi}{2}.$

**Beweis**

(1)  $f(x) := \cos^2 x + \sin^2 x - 1. f'(x) = 2 \cos x (-\sin x) + 2 \sin x \cos x = 0. 21.7 \implies f$   
 ist auf  $\mathbb{R}$  konstant.  $f(0) = 0 \quad |\cos x| = \sqrt{\cos^2 x} \leq \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = 1, \text{ ObdA } x \neq 0.$   
 $\sin x = \sin x - \sin 0 \stackrel{\text{MWS}}{=} \underbrace{|\cos \xi|}_{\leq 1} |x| \leq |x|$

(2) Sei  $y \in \mathbb{R}$  und  $f(x) := (\sin(x + y) - \sin x \cos y - \cos x \sin y)^2 + (\cos(x + y) - \cos x \cos y + \sin x \sin y)^2$ . Klar:  $f(0) = 0$ . Nachrechnen:  $f' = 0$  auf  $\mathbb{R}. 21.7 \implies f \equiv 0$  auf  $\mathbb{R}$ .

(3) Für  $x \in (0, 2) : \sin x = \underbrace{(x - \frac{x^3}{3!})}_{>0} + \underbrace{(\frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!})}_{>0} + \dots \implies$  Behauptung.

- (4)  $\cos 0 = 1 > 0$ .  $\cos 2 = \cos(1+1) = \cos^2 1 - \sin^2 1 = \cos^2 1 + \sin^2 1 - 2\sin^2 1 = 1 - 2\sin^2 1 \stackrel{(3)}{<} 1 - 2\frac{25}{36} < 0$ .  $18.2 \implies \exists \xi_0 \in (0, 2) : \cos \xi_0 = 0$ , In  $(0, 2)$ :  $(\cos x)' = -\sin x \stackrel{(3)}{<} 0 \implies \cos x$  ist in  $(0, 2)$  streng monoton fallend  $\implies \cos x \neq 0 \forall x \in [0, \xi_0)$
- (5)  $\sin^2 \frac{\pi}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\pi}{2} = 1 \implies \sin \frac{\pi}{2} = \pm 1$ . (3)  $\implies \sin \frac{\pi}{2} > 0 \implies \sin \frac{\pi}{2} = 1$ .
- (6) Die erste Behauptung mit kann mit Potenzreihen, der Rest mit den Additionstheoremen bewiesen werden.
- (7) „ $\Leftarrow$ “: klar, „ $\Rightarrow$ “: Sei  $x \in [0, \pi]$  und  $\cos x = 0 \stackrel{(4)}{\implies} x \geq \frac{\pi}{2}, y := \pi - x, y \in [0, \frac{\pi}{2}]$  und  $\cos y = \cos(x + \pi) \stackrel{(6)}{=} -\cos(-x) = -\cos(x) \stackrel{(4)}{\implies} y \leq \frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}$ .
- (8) In den großen Übungen ■

**Definition 21.11 (Tangens)**

$$\tan x := \frac{\sin x}{\cos x} \text{ für } x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

$I := (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ;  $f(x) := \tan x$  ( $x \in I$ ). Dann:  $f \in C(I)$ .  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} f(x) = -\infty$ ,  
 $f'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x > 0$  auf  $I \implies f$  ist auf  $I$  streng monoton wachsend  $\implies \exists f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow I, \arctan x := f^{-1}(x)$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) **Arcustangens**. Sei  $y = \tan x$  ( $x \in I$ ).  
 $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$ . Also:  $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$  auf  $\mathbb{R}$ .

**Definition**

Sei  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall;  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $x_0 \in I$ .  $f$  wird in einer Umgebung von  $x_0$  durch eine Potenzreihe dargestellt :  $\iff \exists \delta > 0$  und  $\exists$  eine Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$  mit Konvergenzradius  $\geq \delta$  und  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \forall x \in I \cap U_{\delta}(x_0)$ .

**Beispiele:**

- (1)  $I = (-\infty, 1), f(x) = \frac{1}{1-x}$ . Bekannt:  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$  für  $x \in (-1, 1)$ . Also:  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$  für  $x \in (-1, 1)$
- (2)  $I = \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$  ( $x \in (-1, 1)$ )
- (3)  $I = (-1, \infty), f(x) = \log(1+x)$ . Behauptung: (\*)

$$\boxed{\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (x \in (-1, 1))}$$

**Beweis**

$g(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$  ( $x \in (-1, 1)$ ) 21.9  $\implies g$  ist auf  $(-1, 1)$  differenzierbar und  $g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} = f'(x) \forall x \in (-1, 1)$ . 21.7  $\implies \exists c \in \mathbb{R} : f(x) = g(x) + c \forall x \in (-1, 1) \xrightarrow{x=0} 0 = f(0) = g(0) + c = c \implies f(x) = g(x) \forall x \in (-1, 1) \implies$  Behauptung. In den großen Übungen wird gezeigt (Abelscher Grenzwert-Satz): (\*) gilt noch für  $x = 1$ . Also:  $\log 2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1^{n+1}}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  ■

## 22. Höhere Ableitungen

Stets in diesem Paragraphen:  $I \subseteq \mathbb{R}$  sei ein Intervall und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion.

### Definition

- (1)  $f$  sei auf  $I$  differenzierbar und  $x_0 \in I$ .  $f$  heißt in  $x_0$  zweimal differenzierbar genau dann, wenn  $f'$  in  $x_0$  differenzierbar ist. In diesem Fall heißt  $f''(x_0) = (f')'(x_0)$  die zweite Ableitung von  $f$  in  $x_0$ .
- (2)  $f$  heißt auf  $I$  zweimal differenzierbar genau dann, wenn  $f$  in jedem  $x \in I$  zweimal differenzierbar ist. In diesem Fall heißt  $f'' = (f')'$  die zweite Ableitung von  $f$  auf  $I$ .
- (3) Entsprechend definiert man (falls vorhanden):  $f'''(x_0), f^{(4)}(x_0), \dots$  bzw.  $f''', f^{(4)}, \dots$
- (4) Sei  $n \in \mathbb{N}$ .  $f$  heißt auf  $I$   **$n$ -mal stetig differenzierbar** genau dann, wenn  $f$  auf  $I$   $n$ -mal differenzierbar ist und  $f, f', \dots, f^{(n)} \in C(I)$ .
- (5) Sei  $n \in \mathbb{N}$ .  $C^n(I) := \{g : I \rightarrow \mathbb{R} : g \text{ ist auf } I \text{ } n\text{-mal stetig differenzierbar}\}$ ,  $C^0(I) := C(I)$ ,  $f^{(0)} := f$ ,  $C^\infty(I) := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C^n(I)$ .

### Beispiele:

(1)  $(\sin x)' = \cos x$ ,  $(\sin x)'' = -\sin x$ , ...

(2)  $(e^x)^{(n)} = e^x$  auf  $\mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N}_0$

(3)  $f(x) := \begin{cases} x^2 & ; x \geq 0 \\ -x^2 & ; x < 0 \end{cases}$ . Für  $x > 0$ :  $f'(x) = 2x$ , für  $x < 0$ :  $f'(x) = -2x$ .

Für  $x = 0$ :  $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\pm x^2}{x} = \pm x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \implies f$  ist in  $x = 0$  differenzierbar und  $f'(0) = 0$ . Also:  $f'(x) = 2|x| \forall x \in \mathbb{R}$ . Also ist  $f$  in  $x = 0$  nicht zweimal differenzierbar.

(4)  $f(x) := \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin(\frac{1}{x}) & ; x \neq 0 \\ 0 & ; x = 0 \end{cases}$ .

Für  $x \in (0, 1]$ :  $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \sin \frac{1}{x} + x^{\frac{3}{2}} \cos \frac{1}{x} (-\frac{1}{x^2}) = \frac{3}{2}\sqrt{x} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \frac{1}{x}$ .

Für  $x = 0$ :  $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \sqrt{x} \sin \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ .  $f$  ist also auf  $[0, 1]$  differenzierbar.

$x_n := \frac{1}{n\pi}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Dann  $x_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).  $f'(x_n) = (-1)^{n+1} \sqrt{n\pi} \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ )  $\implies f'$  ist nicht stetig in  $x = 0$ . Also  $f \notin C^1([0, 1])$ . Für später:  $f'$  ist auf  $[0, 1]$  nicht beschränkt.

### Satz 22.1 (Differenzierbarkeit von Potenzreihen)

Sei  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  eine Potenzreihe mit Konvergenzradius  $r > 0$ ,  $I := (x_0-r, x_0+r)$  ( $I = \mathbb{R}$  falls  $r = \infty$ ) und  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$  ( $x \in I$ ).

(1)  $f \in C^\infty(I)$

$$(2) \quad \forall x \in I \quad \forall k \in \mathbb{N} : f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \dots (n-k+1) \cdot a_n (x-x_0)^{n-k}.$$

$$(3) \quad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$$

**Beweis**

- (1) und
- (2) folgen induktiv aus 21.9.
- (3) folgt aus (2) und  $x = x_0$  ■

**Motivation:** Ist also  $f$  wie in 22.1, so gilt:  $f \in C^\infty(I)$  und  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \quad \forall x \in I$ .

**Definition**

Sei  $f \in C^\infty(I)$  und  $x_0 \in I$ . Die Potenzreihe  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$  heißt die zu  $f$  (und  $x_0$ ) gehörende **Taylorreihe**.

**Motivation:** *Frage:* Wird  $f$  in einer Umgebung von  $x_0$  durch seine Taylorreihe dargestellt?  
*Antwort:* Manchmal!

**Beispiele:**

- (1) Ist  $f$  wie in 22.1, so lautet die Antwort: ja!

$$(2) \quad f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}.$$

Übungsblatt:  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$  und  $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$ .

Dann:  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = 0 \neq f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

**Definition**

Sei  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $f \in C^n(I)$  und  $x_0 \in I$ .

$T_n(x; x_0) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$  heißt das **k-te Taylorpolynom** von  $f$  vom Grad  $\leq k$ .

**Eigenschaften**

- (1)  $p$  ist ein Polynom vom Grad  $\leq n$  und es gilt:  $p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$  für  $k = 0, 1, \dots, n$
- (2) Ist  $q$  ein Polynom vom Grad  $\leq n$  und gilt  $q^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$  für  $k = 0, 1, \dots, n$ , so ist  $p = q$ .
- (3) Ist  $f \in C^\infty(I)$ , so ist  $T_n(x, x_0)$  die  $n$ -te Teilsumme der Taylorreihe  $f$  (in  $x_0$ ).

**Satz 22.2 (Satz von Taylor)**

Voraussetzungen wie in obiger Definition. Weiter sei  $f$   $(n+1)$ -mal differenzierbar auf  $I$  und  $x \in I$ . Dann existiert ein  $\xi$  zwischen  $x$  und  $x_0$  mit:

$$f(x) = T_n(x; x_0) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}}_{\text{Restglied nach Lagrange}}$$

**Beweis**

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $x_0 = 0$  und  $x > x_0$ .

$$\rho := (f(x) - T_n(x; 0)) \frac{(n+1)!}{x^{n+1}} \implies f(x) - T_n(x; 0) = \frac{\rho}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Zu zeigen ist:  $\exists \xi \in [0, x] : \rho = f^{(n+1)}(\xi)$ .

Definiere  $h : [0, x] \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $f(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k - \rho \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}$ . Nachrechnen:

$$h(0) = h(x) \text{ und } h'(t) = \rho \frac{(x-t)^n}{n!} - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n.$$

$$0 = \frac{h(x) - h(0)}{x-0} \stackrel{\text{MWS}}{=} h'(\xi) \quad \xi \in (0, x) \implies \rho \frac{(x-\xi)^n}{n!} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!} (x-\xi)^n \implies \rho = f^{(n+1)}(\xi). \quad \blacksquare$$

**Beispiele:**

(1) Behauptung:  $e \notin \mathbb{Q}$

Beweis: Bekannt:  $2 < e < 3$ .

Annahme:  $\exists m, n \in \mathbb{N} : e = \frac{m}{n}$ . Dann:  $n \geq 2$  (Sonst:  $e = m \in \mathbb{N}$ , Wid!)  $f(x) := e^x, x_0 = 0, x = 1$

$$22.2 \implies \exists \xi \in (0, 1) \text{ mit } \frac{m}{n} = e = f(1) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$

$$\frac{m}{n} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!} \quad | \cdot n!$$

$$\underbrace{m(n-1)!}_{\in \mathbb{N}} = \underbrace{n! + n! + \frac{n!}{2!} + \dots + \frac{n!}{n!}}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{\frac{e^\xi}{n+1}}_{> 0} \implies \frac{e^\xi}{n+1} \in \mathbb{N} \implies 1 \leq \frac{e^\xi}{n+1} < \frac{e}{n+1} <$$

$$\frac{3}{n+1} \stackrel{n \geq 2}{\leq} 1. \text{ Wid!}$$

(2) Behauptung:  $\log 2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

Beweis:  $I = (-1, \infty), f(x) = \log(1+x), x_0 = 0, x = 1$ . Durch vollständige Induktion lässt sich zeigen:

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1} (k-1)!}{(1+x)^k} \quad (k \in \mathbb{N})$$

Also gilt:

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \begin{cases} 0, & k = 0 \\ \frac{(-1)^{k+1}}{k}, & k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Wegen dem Satz von Taylor folgt:

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} \exists \xi_n \in (0, 1) : \log 2 &= f(1) = T_n(1; 0) + \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} + \frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi_n)}{(n+1)!}}_{=: c_n} \end{aligned}$$

zu zeigen:  $c_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$ .

$$|c_n| = \left| \frac{(-1)^{n+2} n!}{(n+1)! (1+\xi_n)^{n+1}} \right| = \frac{1}{n+1} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1+\xi_n)^{n+1}}}_{\leq 1} \implies c_n \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

**Satz 22.3 (Bestimmung von Extrema durch höhere Ableitungen)**

Sei  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$ ,  $f \in C^n(I)$ ,  $x_0 \in I$  und  $x_0$  sei ein innerer Punkt von  $I$ . Weiter gelte:  $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$  und  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ .

- (1) Ist  $n$  gerade und  $f^{(n)}(x_0) > 0 \implies f$  hat in  $x_0$  ein relatives Minimum.  
 Ist  $n$  gerade und  $f^{(n)}(x_0) < 0 \implies f$  hat in  $x_0$  ein relatives Maximum.
- (2) Ist  $n$  ungerade  $\implies f$  hat in  $x_0$  kein relatives Extremum.

**Beweis**

$f \in C^n(I) \implies f^{(n)} \in C(I)$ ,  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ . Damit folgt nach §18:

$$\exists \delta > 0 : U_\delta(x_0) \subseteq I \text{ und } f^{(n)}(x_0) f^{(n)}(\xi) > 0 \quad \forall \xi \in U_\delta(x_0). \quad (*)$$

Sei  $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$ . Nach dem Satz von Taylor existiert ein  $\xi$  zwischen  $x$  und  $x_0$  mit:

$$f(x) = \underbrace{T_{n-1}(x; x_0)}_{\stackrel{\text{Vor.}}{=} f(x_0)} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^n = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Zu (1): Sei  $n$  gerade,  $x \neq x_0 \implies (x - x_0)^n > 0$ . Aus  $f^{(n)}(x_0) > 0$  folgt wegen (\*):

$$f^{(n)}(\xi) > 0 \implies \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^n > 0 \implies f(x) > f(x_0)$$

$\implies f$  hat in  $x_0$  ein relatives Minimum. Analog: Aus  $f^{(n)}(x_0) < 0$  folgt:  $f$  hat in  $x_0$  ein relatives Maximum.

Zu (2): Sei  $n$  ungerade. Sei  $f^{(n)}(x_0) > 0$ . Aus  $x > x_0$  folgt:

$$(x - x_0)^n > 0, f^{(n)}(\xi) > 0 \implies f(x) > f(x_0).$$

Analog: Aus  $x > x_0$  folgt:  $f(x) < f(x_0) \implies f$  hat in  $x_0$  kein Extremum.

Analog: Ist  $f^{(n)}(x_0) < 0 \implies f(x) < f(x_0)$  für  $x > x_0$  und  $f(x) > f(x_0)$  für  $x < x_0$ . ■

**Beispiel**

*Bemerkung:* Dieses Beispiel zeigt, wann man den Satz *nicht* anwenden sollte.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Bekannt:  $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$ .  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ,  $f(0) = 0 \implies f$  hat in  $x_0 = 0$  ein absolutes Minimum.

## 23. Das Riemann-Integral

In diesem Paragraphen gilt stets:  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ ,  $I = [a, b]$  und  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  sei *beschränkt*.  
 $m := \inf f(I)$ ,  $M := \sup f(I)$ .

### Definition

$Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \subseteq I$  heißt eine **Zerlegung** von  $I : \iff a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .  
 $I_j := [x_{j-1}, x_j]$ ,  $|I_j| = x_j - x_{j-1}$ ,  $m_j := \inf f(I_j)$ ,  $M_j := \sup f(I_j)$  ( $j = 1, \dots, n$ )

Dann gilt:  $m \leq m_j \leq M_j \leq M$  ( $j = 1, \dots, n$ ),  $\sum_{j=1}^n |I_j| = b - a$  ( $= |I|$ )

$s_f(Z) := \sum_{j=1}^n m_j |I_j|$  heißt die **Untersumme** von  $f$  bzgl.  $Z$ .

$S_f(Z) := \sum_{j=1}^n M_j |I_j|$  heißt die **Obersumme** von  $f$  bzgl.  $Z$ .

$$m \leq m_j \leq M_j \leq M \implies m|I_j| \leq m_j|I_j| \leq M_j|I_j| \leq M|I_j|$$

Durch Summation erhält man:  $m(b-a) \leq s_f(Z) \leq S_f(Z) \leq M(b-a)$ .

$\mathfrak{Z} := \{Z : Z \text{ ist eine Zerlegung von } I\}$ . Sind  $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z} \implies Z_1 \cup Z_2 \in \mathfrak{Z}$ . Gilt  $Z_1 \subseteq Z_2$ , so heißt  $Z_2$  eine **Verfeinerung** von  $Z_1$ .

### Satz 23.1 (Zerlegungs-Verfeinerungen)

Seien  $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z}$ .

(1) Ist  $Z_1 \subseteq Z_2 \implies s_f(Z_1) \leq s_f(Z_2)$ ,  $S_f(Z_2) \leq S_f(Z_1)$

(2)  $s_f(Z_1) \leq S_f(Z_2)$

### Beweis

(1) Übung (es genügt zu betrachten:  $Z_2 = Z_1 \cup \{t_0\}$ ,  $t_0 \notin Z_1$ )

(2)  $Z := Z_1 \cup Z_2$ . Dann:  $s_f(Z_1) \stackrel{(1)}{\leq} s_f(Z) \leq S_f(Z) \stackrel{(1)}{\leq} S_f(Z_2)$ . ■

### Definition

$\int_a^b f dx := \int_a^b f(x) dx := \sup\{s_f(Z) : Z \in \mathfrak{Z}\}$  heißt **unteres Integral** von  $f$

$\int_a^b f dx := \int_a^b f(x) dx := \inf\{S_f(Z) : Z \in \mathfrak{Z}\}$  heißt **oberes Integral** von  $f$

Sei  $Z \in \mathfrak{Z}$ . Dann:  $m(b-a) \leq s_f(Z) \leq \int_a^b f dx \stackrel{23.1(2)}{\leq} S_f(Z) \leq M(b-a) \implies m(b-a) \leq \int_a^b f dx \leq M(b-a)$

**Definition**

$f$  heißt (Riemann-)integrierbar über  $[a, b] : \iff \int_a^b f dx = \int_a^b f dx$ . In diesem Fall heißt

$$\int_a^b f dx := \int_a^b f(x) dx := \int_a^b f dx (= \int_a^b f dx)$$

das (Riemann-)Integral von  $f$  über  $[a, b]$ .

$R[a, b] := \{g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : g \text{ ist auf } [a, b] \text{ beschränkt und integrierbar über } [a, b]\}$

**Beispiele:**

- (1) Sei  $c \in \mathbb{R}$  und  $f(x) = c \forall x \in [a, b]$ . Sei  $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$ ;  $m_j = M_j = c$  ( $j = 1, \dots, n$ )  $\implies s_f(Z) = S_f(Z) = \sum_{j=1}^n c |I_j| = c(b-a) \implies f \in R[a, b]$  und  $\int_a^b c dx = c(b-a)$ .

(2)

$$f(x) := \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \in [a, b] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Sei  $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$ ,  $m_j = 0$ ,  $M_j = 1$  ( $j = 1, \dots, n$ )  
 $\implies s_f(Z) = 0$ ,  $S_f(Z) = \sum_{j=1}^n |I_j| = b-a$ .

$\implies \int_a^b f dx = 0 \neq b-a = \int_a^b f dx \implies f \notin R[a, b]$ .

- (3)  $[a, b] = [0, 1]$ ,  $f(x) = x$ . Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ , wobei  $x_j := j \frac{1}{n}$  ( $j = 0, \dots, n$ ).  
 $m_j, M_j, I_j$  wie immer. Dann:  $|I_j| = \frac{1}{n}$ .

$$m_j = f(x_{j-1}) = (j-1) \frac{1}{n}. \quad s_f(Z) = \sum_{j=1}^n (j-1) \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} (0+1+\dots+(n-1)) = \frac{1}{n^2} \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n-1}{2n}$$

$$M_j = f(x_j) = \frac{j}{n}. \quad S_f(Z) = \sum_{j=1}^n j \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2} (1+\dots+n) = \frac{1}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2n}$$

$$\frac{n-1}{2n} = s_f(Z) \leq \int_0^1 x dx \leq \int_0^1 x dx \leq S_f(Z) = \frac{n+1}{2n} \implies f \in R[0, 1] \text{ und } \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$$

**Satz 23.2 (Rechenregeln für Integrale)**

Es seien  $f, g \in R[a, b]$

(1) Ist  $f \leq g$  auf  $[a, b] \implies \int_a^b f dx \leq \int_a^b g dx$

(2) Sind  $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \implies \alpha f + \beta g \in R[a, b]$  und  $\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx$

**Beweis**

- (1) Übung.

(2) Übung:  $\alpha f \in R[a, b]$  und  $\int_a^b (\alpha f) dx = \alpha \int_a^b f dx$ .

Zu zeigen:  $f + g \in R[a, b]$  und  $\int_a^b (f + g) dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$ . Sei  $z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$ ,  $m_j, M_j, I_j$  wie immer.  $\widetilde{m}_j := \inf g(I_j)$ ,  $\widetilde{M}_j := \inf (f + g)(I_j)$ .  $x \in I_j : (f + g)(x) = f(x) + g(x) \geq m_j + \widetilde{m}_j \implies \widetilde{m}_j \geq m_j + \widetilde{m}_j \implies \widetilde{m}_j |I_j| \geq m_j |I_j| + \widetilde{m}_j |I_j| \xrightarrow{\text{Summation}} S_{f+g}(Z) \geq S_f(Z) + S_g(Z) \implies S_f(Z) + S_g(Z) \leq \int_a^b (f + g) dx \forall z \in \mathfrak{Z} (*)$ . Sei  $\varepsilon > 0 : \exists Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z} : S_f(Z_1) > \int_a^b f dx - \varepsilon = \int_a^b f dx - \varepsilon, S_g(Z_2) > \int_a^b g dx - \varepsilon, Z := Z_1 \cup Z_2 \in \mathfrak{Z}$ .  $\underbrace{\int_a^b f dx + \int_a^b g dx}_{=: A} - 2\varepsilon < S_f(Z_1) + S_g(Z_2) \stackrel{23.1}{\leq} S_f(Z) + S_g(Z) \stackrel{(*)}{\leq} \int_a^b (f + g) dx$ . Also:  
 $A - 2\varepsilon \leq \int_a^b (f + g) dx \forall \varepsilon > 0 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} A \leq \int_a^b (f + g) dx$ . Analog:  $\int_a^b (f + g) dx \leq A \implies A = \int_a^b (f + g) dx = \int_a^b f dx + \int_a^b g dx$  ■

**Satz 23.3 (Riemannsches Integrabilitätskriterium)**

$f \in R[a, b] \iff \forall \varepsilon > 0 \exists Z \in \mathfrak{Z} : S_f(Z) - s_f(Z) < \varepsilon$ .

**Beweis**

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $\varepsilon > 0$ . Voraussetzung  $\implies \exists Z \in \mathfrak{Z} : S_f(Z) < s_f(Z) + \varepsilon \implies \int_a^b f dx \leq S_f(Z) < s_f(z) + \varepsilon \leq \int_a^b f dx + \varepsilon$ . Also:  $\int_a^b f dx < \int_a^b f dx + \varepsilon \forall \varepsilon > 0 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b f dx \leq \int_a^b f dx (\leq \int_a^b f dx) \implies f \in R[a, b]$ .

„ $\implies$ “:  $S := \int_a^b f dx$ . Sei  $\varepsilon > 0$ .  $\exists Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z} : s_f(Z_1) > \int_a^b f dx - \frac{\varepsilon}{2} = S - \frac{\varepsilon}{2}, S_f(Z_2) < S + \frac{\varepsilon}{2}, Z := Z_1 \cup Z_2 \in \mathfrak{Z}$ .  $S_f(Z) - s_f(Z) \stackrel{23.1}{\leq} S_f(Z_2) - s_f(Z_1) < S + \frac{\varepsilon}{2} - (S - \frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$ . ■

**Satz 23.4 (Integrabilität monotoner und stetiger Funktionen)**

(1) Ist  $f$  auf  $[a, b]$  monoton  $\implies f \in R[a, b]$ .

(2)  $C[a, b] \subseteq R[a, b]$ .

**Beweis**

(1) O.B.d.A:  $f$  ist wachsend auf  $[a, b]$ .

Sei  $n \in \mathbb{N}$  und  $Z_n = \{x_0, \dots, x_n\}$  sei die **äquidistante Zerlegung** von  $[a, b]$  mit  $n + 1$  Teilpunkten.  $x_j = a + j \frac{b-a}{n} (j = 0, \dots, n)$ . Dann:  $|I_j| = \frac{b-a}{n}$ .  $m_j, M_j$  wie immer:  $S_f(Z_n) - s_f(Z_n) = \sum_{j=1}^n (\underbrace{M_j}_{=f(x_j)} - \underbrace{m_j}_{f(x_{j-1})}) |I_j| = \sum_{j=1}^n (f(x_j) - f(x_{j-1})) \frac{b-a}{n} = \frac{b-a}{n} (f(x_1) - f(x_0) +$

$f(x_2) - f(x_1) + \dots + f(x_n) - f(x_{n-1})) = \frac{b-a}{n} (f(x_n) - f(x_0)) = \frac{b-a}{n} (f(b) - f(a)) =: \alpha_n$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ , dann:  $\exists n \in \mathbb{N} : \alpha_n < \varepsilon \xrightarrow{23.3} \text{Behauptung}$ .

(2) Sei  $f \in C[a, b]$  und  $\varepsilon > 0$ .  $\exists \delta > 0 : (*) |f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \forall t, s \in [a, b]$  mit  $|t - s| < \delta$ . Sei  $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$   $m_j, M_j, |I_j|$  seien wie immer;  $z$  sei so gewählt, daß  $|I_j| < \delta (j = 1, \dots, n)$ . Betrachte  $I_j : 18.3 \implies \exists s_j, t_j \in I_j : m_j = f(s_j), M_j = f(t_j)$ .

$$|t_j - s_j| < \delta \stackrel{(*)}{\implies} \underbrace{f(t_j) - f(s_j)}_{=M_j - m_j} < \frac{\varepsilon}{b-a} \implies S_f(Z) - s_f(Z) = \sum_{j=1}^n \underbrace{(M_j - m_j)}_{\leq \frac{\varepsilon}{b-a}} |I_j| < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^n |I_j| = \varepsilon \stackrel{23.3}{\implies} f \in R[a, b] \quad \blacksquare$$

**Definition**

Sei  $J \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $G, g : J \rightarrow \mathbb{R}$  seien Funktionen.  $G$  heißt eine **Stammfunktion** von  $g$  auf  $J$  :  $\iff G$  ist auf  $J$  differenzierbar und  $G' = g$  auf  $J$ .

**Beachte:**

- (1) Sind  $G_1$  und  $G_2$  Stammfunktionen von  $g$  auf  $J \stackrel{21.7}{\implies} \exists c \in \mathbb{R} : G_1 = G_2 + c$  auf  $J$ .
- (2) Sei  $I = [a, b]$ . Es gibt Funktionen, die auf  $[a, b]$  Stammfunktionen besitzen, aber über  $[a, b]$  nicht integrierbar sind.

**Beispiel**

$$F(x) := \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Bekannt: (§22):  $F$  ist auf  $[0, 1]$  differenzierbar und  $f := F'$  ist auf  $[0, 1]$  *nicht* beschränkt. Also:  $f \notin R[0, 1]$ , besitzt aber auf  $[0, 1]$  die Stammfunktion  $F$ .

- (3) Sei  $I = [a, b]$ . Es gibt Funktionen in  $R[a, b]$ , die auf  $[a, b]$  keine Stammfunktionen besitzen.

**Beispiel**

Sei  $[a, b] = [-1, 1]$ ,  $f(x) := \begin{cases} 1 & x \in [0, 1] \\ 0 & x \in [-1, 0) \end{cases}$ .  $f$  ist monoton auf  $[-1, 1] \stackrel{23.4}{\implies} f \in R[-1, 1]$ .

Annahme:  $f$  besitzt auf  $[-1, 1]$  die Stammfunktion  $F$ . Auf  $[0, 1] : F'(x) = f(x) = 1 = (x)' \stackrel{21.7}{\implies} \exists c_1 \in \mathbb{R} : F(x) = x + c_1 \forall x \in [0, 1]$ . Auf  $[-1, 0) : F'(x) = f(x) = 0 \stackrel{21.7}{\implies} \exists c_2 \in \mathbb{R} : F(x) = c_2 \forall x \in [-1, 0)$ .  $\lim_{x \rightarrow 0+} F(x) = c_1, \lim_{x \rightarrow 0-} F(x) = c_2$ .  $F$  stetig in  $x = 0 \implies c_1 = c_2$ .  $\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x + c_1 - c_1}{x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0-} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \frac{c_2 - c_1}{x} = 0$ , Widerspruch zur Differenzierbarkeit von  $F$  in  $x_0 = 0$ .

**Satz 23.5 (1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**  
 Es sei  $f \in R[a, b]$  und  $f$  besitze auf  $[a, b]$  die Stammfunktion  $F$ . Dann:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) =: F(x)|_a^b =: [F(x)]_a^b$$

**Beweis**

Sei  $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}; m_j, M_j, I_j$  sei wie gehabt. Sei  $j \in \{1, \dots, n\}$ . MWS  $\implies \exists \xi_j \in I_j : F(x_j) - F(x_{j-1}) = F'(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) = f(\xi_j) \cdot |I_j| \implies \sum_{j=1}^n f(\xi_j) |I_j| = \sum_{j=1}^n (F(x_j) -$

$$F(x_{j-1}) = F(b) - F(a)$$

$$m_j |I_j| \leq f(\xi_j) |I_j| \leq M_j |I_j| \xrightarrow{\text{Summation}} s_f(Z) \leq F(b) - F(a) \leq S_f(Z) \quad \forall Z \in \mathfrak{Z} \implies \underbrace{\int_a^b f dx}_{= \int_a^b f dx} \leq$$

$$F(b) - F(a) \leq \underbrace{\int_a^b f dx}_{= \int_a^b f dx} \implies F(b) - F(a) = \int_a^b f dx \quad \blacksquare$$

**Beispiele:**

(1)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$ ,  $\cos x$  ist stetig auf  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , also integrierbar.  $F(x) = \sin x$  ist eine Stammfunktion von  $\cos x \implies \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ .

(2)  $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^1 = \arctan 1 - \arctan 0 = \frac{\pi}{4}$

**Beispiele:**

(1) Sei  $\mathbb{Q} \cap [0, 1] = \{q_1, q_2, \dots\}$ ,  $f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{q_1, \dots, q_n\} \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \{q_1, \dots, q_n\} \end{cases}$ , ( $f_n$ ) konvergiert auf  $[0, 1]$  *punktweise* gegen  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ . Bekannt:  $f \notin R[0, 1]$ . In 23.10 werden wir sehen:  $f_n \in R[0, 1] \quad \forall n \in \mathbb{N}$ .

(2) Für  $x \in [0, 1]$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 3$  sei  $f_n$  wie in der Zeichnung:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 2n - n^2 x, & x \in (\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0, & x \in (\frac{2}{n}, 1] \end{cases}$$

$f_n \in C[0, 1] \implies f_n \in R[0, 1]$ . zur Übung:  $\int_0^1 f_n dx = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . ( $f_n$ ) konvergiert auf  $[0, 1]$  *punktweise* gegen  $f(x) = 0$ .

Aber:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 f dx = \int_0^1 (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)) dx$

**Satz 23.6 (Integrierbarkeit gleichmäßig konvergierender Funktionsfolgen)**

( $f_n$ ) sei eine Folge in  $R[a, b]$  und ( $f_n$ ) konvergiert auf  $[a, b]$  *gleichmäßig* gegen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist  $f \in R[a, b]$  und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f dx = \int_a^b (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n) dx$$

( $f_n$ ) sei eine Folge in  $R[a, b]$  und  $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$  konvergiert auf  $[a, b]$  *gleichmäßig* gegen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann ist  $f \in R[a, b]$  und

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx$$

**Beweis**

1. Zu  $\varepsilon = 1 \exists m \in \mathbb{N}: f_m - 1 < f < f_m + 1$  auf  $[a, b]$ .  $f_n$  beschränkt auf  $[a, b]$ .

2.  $A_n := \int_a^b f_n dx$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Sei  $\varepsilon > 0. \exists n_0 \in \mathbb{N}: f_n - \varepsilon < f < f_n + \varepsilon$  auf  $[a, b] \forall n \geq n_0 \implies$  für  $n \geq n_0$  folgt (wie im Beweis von 23.2(1)):

$$\underbrace{\int_a^b (f_n - \varepsilon) dx}_{=A_n - \varepsilon(b-a)} \leq \underbrace{\int_a^b f dx}_{=:A} \leq \underbrace{\int_a^b f dx}_{=:B} \leq \underbrace{\int_a^b (f_n + \varepsilon) dx}_{=A_n + \varepsilon(b-a)}$$

$$\implies |A_n - A| \leq \varepsilon(b-a), |A_n - B| \leq \varepsilon(b-a)$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \implies A_n \rightarrow A, A_n \rightarrow B \ (n \rightarrow \infty) \implies A = B$$

$$\implies f \in R[a, b] \text{ und } A_n \rightarrow \int_a^b f dx$$

■

**Beispiel**

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & x \in (0, 1] \end{cases}$$

$g$  ist monoton  $\implies g \in R[0, 1]$ .

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd} \end{cases}$$

Übungsblatt:  $f \in R[0, 1]$

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \notin R[0, 1]$$

**Satz 23.7 (Integration von verketteten Funktionen)**

Es sei  $f \in R[a, b]$ ,  $D := f([a, b])$  und  $h : D \rightarrow \mathbb{R}$  sei Lipschitz-stetig auf  $D$ . Dann:  $h \circ f \in R[a, b]$

**Beweis**

$g := h \circ f. \exists L > 0. |h(t) - h(s)| \leq L|t - s| \forall t, s \in D$ . O.B.d.A:  $L > 0$ . Sei  $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$ ,  $m_j, M_j, I_j$  seien wie gehabt.  $\tilde{m}_j := \inf g(I_j), \tilde{M}_j := \sup g(I_j)$ . Seien  $x, y \in I_j$ , etwa  $f(x) \leq f(y)$ :  
 $g(x) - g(y) \leq |g(x) - g(y)| = |h(f(x)) - h(f(y))| \leq L|f(x) - f(y)| = L(f(y) - f(x)) \leq L(M_j - m_j) =: c_j \implies g(x) \leq g(y) + c_j \forall x, y \in I_j \implies \tilde{M}_j \leq g(y) + c_j \forall y \in I_j \implies \tilde{M}_j - c_j \leq g(y) \forall y \in I_j \implies \tilde{M}_j - c_j \leq \tilde{m}_j \implies \tilde{M}_j - \tilde{m}_j \leq c_j = L(M_j - m_j) \implies S_g(Z) - s_g(Z) = \sum_{j=1}^n (\tilde{M}_j - \tilde{m}_j) |I_j| \leq L \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) |I_j| = L(S_f(Z) - s_f(Z)) \forall Z \in \mathfrak{Z} \xrightarrow{23.3} g \in R[a, b]$  ■

**Satz 23.8 (Weitere Rechenregeln für Integrale)**

Es seien  $f, g \in R[a, b]$ .

- (1)  $|f| \in R[a, b]$  und  $|\int_a^b f dx| \leq \int_a^b |f| dx$  (**Dreiecksungleichung für Integrale**)
- (2)  $fg \in R[a, b]$
- (3) Ist  $g(x) \neq 0 \forall x \in [a, b]$  und  $\frac{1}{g}$  beschränkt auf  $[a, b] \implies \frac{1}{g} \in R[a, b]$

**Beweis**

- (1)  $D := f([a, b]), h(t) := |t| (t \in D)$ . Dann:  $|f| = h \circ f$ . Für  $t, s \in D$ :  $|h(t) - h(s)| = ||t| - |s|| \stackrel{\S 1}{\leq} |t - s| \stackrel{23.7}{\implies} |f| \in R[a, b]$   
 $\pm f \leq |f|$  auf  $[a, b]$ . 23.2  $\implies \pm \int_a^b f dx \leq \int_a^b |f| dx \implies |\int_a^b f dx| \leq \int_a^b |f| dx$
- (2) 1.  $D := f([a, b]), h(t) := t^2 (t \in D)$ . Dann:  $f^2 = h \circ f$ .  
 $\exists \gamma > 0 : |f(x)| \leq \gamma \forall x \in [a, b] \implies |t| < \gamma \forall t \in D$  Für  $t, s \in D$ :  $|h(t) - h(s)| = |t^2 - s^2| = |t + s||t - s| \leq (|t| + |s|) \cdot |t - s| \leq 2\gamma|t - s| \stackrel{23.7}{\implies} f^2 \in R[a, b]$   
 2.  $f + g, f - g \in R[a, b] \implies (f + g)^2, (f - g)^2 \in R[a, b] \implies \frac{1}{4}((f + g)^2 - (f - g)^2) \in R[a, b] \implies f \cdot g \in R[a, b]$
- (3)  $D := g([a, b]), h(t) := \frac{1}{t} (t \in D)$ . Dann:  $\frac{1}{g} = h \circ g$ .  
 $\exists \gamma > 0 : \frac{1}{|g(x)|} \leq \gamma \forall x \in [a, b] \implies \frac{1}{|t|} \leq \gamma \forall t \in D$ . Für  $t, s \in D$ :  $|h(t) - h(s)| = |\frac{1}{t} - \frac{1}{s}| = \frac{|t-s|}{|t||s|} \leq \gamma^2|t - s| \stackrel{23.7}{\implies} \frac{1}{g} \in R[a, b]$

**Satz 23.9 (Aufteilung eines Integrals)**

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei beschränkt und  $c \in (a, b)$ . Dann gilt:

$$f \in R[a, b] \iff f \in R[a, c] \text{ und } f \in R[c, b].$$

In diesem Fall ist:

$$\int_a^b f dx = \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$$

**Beweis**

„ $\implies$ “: Sei  $\varepsilon > 0$ . Aus 23.3 folgt:  $\exists Z_1 \in \mathfrak{Z} : S_f(Z_1) - s_f(Z_1) < \varepsilon$ .

$Z := Z_1 \cup \{c\} \in \mathfrak{Z}$ . Sei  $Z = \{x_0, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\}$  mit  $x_k = c$ .  $Z_0 := \{x_0, \dots, x_k\}$  ist eine Zerlegung von  $[a, c]$ .  $M_j, m_j, I_j$  seien wie immer. Dann gilt:

$$S_f(Z_0) - s_f(Z_0) = \sum_{j=1}^k (M_j - m_j)|I_j| \leq \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)|I_j| = S_f(Z) - s_f(Z) \leq S_f(Z_1) - s_f(Z_1) < \varepsilon \stackrel{23.3}{\implies} f \in R[a, c]. \text{ Analog: } f \in R[c, b].$$

„ $\impliedby$ “:  $S := \int_a^c f dx + \int_c^b f dx$ . Sei  $\varepsilon > 0$  Dann gibt es Zerlegungen  $Z_1$  von  $[a, c]$  und  $Z_2$  von  $[c, b] : s_f(Z_1) = \int_a^c f dx - \varepsilon = \int_a^c f dx, s_f(Z_2) > \int_c^b f dx - \varepsilon$ .

$$Z := Z_1 \cup Z_2 \implies Z \in \mathfrak{Z} \text{ und } \int_a^b f dx \geq s_f(Z) = s_f(Z_1) + s_f(Z_2) > S - 2\varepsilon.$$

$$\text{Also: } S - 2\varepsilon < \int_a^b f dx \forall \varepsilon > 0 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} S \leq \int_a^b f dx.$$

Analog:  $\int_a^b f dx \leq S \implies f \in R[a, b], \int_a^b f dx = S.$  ■

**Satz 23.10 (Integral und Unstetigkeitsstellen)**

$f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  seien Funktionen.

- (1) Ist  $f$  beschränkt auf  $[a, b]$  und  $A := \{x \in [a, b] : f \text{ ist in } x \text{ nicht stetig}\}$  endlich, dann gilt:  $f \in R[a, b]$ .
- (2) Ist  $f \in R[a, b]$  und  $A := \{x \in [a, b] : f(x) \neq g(x)\}$  endlich, dann gilt:  $g \in R[a, b]$  und  $\int_a^b g dx = \int_a^b f dx$ .

**Beweis**

- (1)  $\exists \gamma \geq 0 : |f(x)| \leq \gamma \forall x \in [a, b]$ . Es genügt zu betrachten:  $A := \{t_0\}$  (wegen 23.9). O.B.d.A.:  $t_0 = a$  oder  $t_0 = b$ . Etwa:  $t_0 = a$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ . Wähle  $\alpha \in (a, b)$  mit  $2\gamma(\alpha - a) < \varepsilon/2$ .

$f \in C[\alpha, b] \implies f \in R[\alpha, b] \xrightarrow{23.3}$  Es gibt eine Zerlegung  $Z_1$  von  $[\alpha, b]$  mit:  
 $S_f(Z_1) - s_f(Z_1) < \varepsilon/2$ .  $Z := Z_1 \cup \{a\} \implies Z \in \mathfrak{Z}$  und es gilt:

$$\begin{aligned} S_f(Z) - s_f(Z) &= \underbrace{\sup f([a, \alpha]) - \inf f([a, \alpha])}_{\leq 2\gamma} (\alpha - a) + \underbrace{S_f(Z_1) - s_f(Z_1)}_{< \varepsilon/2} \\ &< 2\gamma(\alpha - a) + \varepsilon/2 < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

- (2) Klar:  $g$  ist beschränkt.  $h := g - f$ . Dann:  $h(x) = 0 \forall x \in [a, b] \setminus A \xrightarrow{(1)} h \in R[a, b] \implies g = h + f \in R[a, b]$ .

Noch zu zeigen:  $\int_a^b h dx = 0$ .  $\varphi := |h|$ . Aus 23.8 folgt:  $\varphi \in R[a, b]$  und  $|\int_a^b h dx| \leq \int_a^b \varphi dx$ .

Sei  $Z := \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$ ,  $m_j := \inf \varphi(I_j)$ ,  $\varphi(x) = 0 \forall x \in [a, b] \setminus A$ ,  $\varphi(x) > 0 \forall x \in A \implies m_j = 0$  ( $j = 1, \dots, n$ )  $\implies s_f(Z) = 0 \implies \int_a^b \varphi dx = \int_a^b \varphi dx = 0 \implies \int_a^b h dx = 0$ . ■

**Satz 23.11 (Mittelwertsatz der Integralrechnung)**

Es seien  $f, g \in R[a, b]$ ,  $g \geq 0$  (oder  $g \leq 0$ ) auf  $[a, b]$ ,  $m := \inf f([a, b])$ ,  $M := \sup f([a, b])$

- (1)  $\exists \mu \in [m, M] : \int_a^b f g dx = \mu \int_a^b g dx$
- (2) Ist  $f \in C[a, b] \implies \exists \xi \in [a, b] : \int_a^b f dx = f(\xi)(b - a)$

**Beweis**

- (1)  $\alpha := \int_a^b g dx$ ,  $\beta := \int_a^b f g dx$ .  $m \leq f \leq M$  auf  $[a, b] \implies mg \leq fg \leq Mg$  auf  $[a, b] \implies m\alpha \leq \beta \leq M\alpha$ .

Es ist  $\alpha \geq 0$ . O.B.d.A.:  $\alpha > 0$ . Dann gilt:  $m \leq \frac{\beta}{\alpha} \leq M$ ,  $\mu := \frac{\beta}{\alpha}$ .

(2) Setze in (1)  $g \equiv 1 \implies \int_a^b f dx = \mu(b-a)$  ( $\mu \in [m, M]$ ). Aus 18.1 folgt:  $\exists \xi \in [a, b] : \mu = f(\xi)$ . ■

**Der Riemannsche Zugang zum Integral** *Bemerkung: Wir haben bisher tatsächlich die Darboux'schen Integrale betrachtet. Hier wird nun die ursprüngliche Definition von Riemann vorgestellt.*

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei beschränkt. Sei  $Z := \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$ .  $m_j, M_j, I_j$  seien wie immer.

Wählt man in jedem  $I_j$  einen Punkt  $\xi_j$ , so heißt  $\xi := (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  ein zu  $Z$  passender **Zwischenvektor** und  $\sigma_f(Z, \xi) := \sum_{j=1}^n f(\xi_j)|I_j|$  eine **Riemannsche Zwischensumme**.

$$m_j \leq f(\xi_j) \leq M_j \quad (j = 1, \dots, n) \implies s_f(Z) \leq \sigma_f(Z, \xi) \leq S_f(Z)$$

**Satz 23.12 (Äquivalenz der Riemannschen und Darboux'schen Integrale)**

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei beschränkt. Dann gilt:  $f \in R[a, b]$  genau dann, wenn es ein  $S \in \mathbb{R}$  gibt mit:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists Z \in \mathfrak{Z} : |\sigma_f(Z, \xi) - S| < \varepsilon \text{ für jedes zu } Z \text{ passende } \xi. (*)$$

In diesem Fall gilt:

$$S = \int_a^b f dx.$$

**Beweis**

„ $\implies$ “:  $S := \int_a^b f dx$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Wie im Beweis von 23.3:  $\exists Z \in \mathfrak{Z} : s_f(Z) > S - \varepsilon, S_f(Z) < S + \varepsilon$ .

Sei  $\xi$  passend zu  $Z \implies S - \varepsilon < s_f(Z) \leq \sigma_f(Z, \xi) \leq S_f(Z) < S + \varepsilon \implies |\sigma_f(Z, \xi) - S| < \varepsilon$ .

„ $\impliedby$ “: Sei  $\varepsilon > 0$ . Nach Voraussetzung gibt es ein  $Z \in \mathfrak{Z}$  so, dass (\*) gilt. Sei  $Z := \{x_0, \dots, x_n\}, m_j, M_j, I_j$  wie immer. Sei  $j \in \{1, \dots, n\} : \exists \xi_j, \eta_j \in I_j : f(\xi_j) > M_j - \varepsilon, f(\eta_j) < m_j + \varepsilon, \xi := (\xi_1, \dots, \xi_n), \eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$  sind passend zu  $Z$ .

$$A := \sigma_f(Z, \xi), B := \sigma_f(Z, \eta). A = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)|I_j| > \sum_{j=1}^n (M_j - \varepsilon)|I_j| = S_f(Z) - \varepsilon(b-a) \implies S_f(Z) < A + \varepsilon(b-a). \quad (i)$$

$$\text{Analog: } -s_f(Z) < \varepsilon(b-a) - B. \quad (ii)$$

$$\text{Dann gilt: } S_f(Z) - s_f(Z) < A - B + 2\varepsilon(b-a) = A - S + S - B + 2\varepsilon(b-a) \leq |A - S| + |B - S| + 2\varepsilon(b-a) \stackrel{(*)}{<} 2\varepsilon + 2\varepsilon(b-a) = \varepsilon(2 + 2(b-a)) \stackrel{23.3}{\implies} f \in R[a, b].$$

$$\int_a^b f dx = \int_a^b f dx \leq S_f(Z) \stackrel{(i)}{<} A + \varepsilon(b-a) = A - S + S + \varepsilon(b-a) \leq |A - S| + S + \varepsilon(b-a) \stackrel{(*)}{<} \varepsilon + S + \varepsilon(b-a).$$

$$\text{Also: } \int_a^b f dx < S + \varepsilon(1 + (b-a)) \quad \forall \varepsilon > 0 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^b f dx \leq S. \text{ Analog folgt mit (ii): } S \leq \int_a^b f dx. \quad \blacksquare$$

**Definition**

Sei  $f \in R[a, b]$ .  $\int_c^c f(x) dx := 0$  und  $\int_b^a f(x) dx =: -\int_a^b f(x) dx$

**Bemerkung:**  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$ .

**Satz 23.13 (2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)**

Sei  $f \in R[a, b]$  und  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch  $F(x) := \int_a^x f(t)dt$ .

- (1)  $F$  ist auf  $[a, b]$  Lipschitzstetig, insbesondere  $F \in C[a, b]$
- (2) Ist  $f$  in  $x_0 \in [a, b]$  stetig  $\implies F$  ist in  $x_0$  differenzierbar und  $F'(x_0) = f(x_0)$
- (3) Ist  $f \in C[a, b] \implies F \in C^1[a, b]$  und  $F' = f$  auf  $[a, b]$
- (4) Ist  $n \in \mathbb{N}$  und  $f \in C^n[a, b] \implies F \in C^{n+1}[a, b]$

**Beweis**

(1)  $L := \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$ . Sei  $x, y \in [a, b]$ , etwa  $x \leq y$ .  $F(y) = \int_a^y f(t)dt \stackrel{23.9}{=} \int_a^x f(t)dt + \int_x^y f(t)dt = F(x) + \int_x^y f(t)dt \implies F(y) - F(x) = \int_x^y f(t)dt \implies |F(y) - F(x)| = |\int_x^y f(t)dt| \stackrel{23.8}{\leq} \int_x^y \underbrace{|f(t)|}_{\leq L} dt \leq \int_x^y Ldt = L(y - x) = L|y - x|$

(2) Sei  $x_0 \in [a, b]$ . Wir zeigen: (\*)  $\lim_{h \rightarrow 0+} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$  (analog zeigt man für  $x_0 \in (a, b] : \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0)$ ).

Sei also  $x_0 \in [a, b]$ ,  $h > 0$  und  $x_0 + h < b$ .  $g(h) := |\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0)|$ .

Zu zeigen:  $g(h) \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0+$ ).

Es ist  $\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \stackrel{\text{s.o.}}{=} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)dt$ ,  $\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0)dt = \frac{1}{h} f(x_0)h = f(x_0) \implies$

$g(h) = \frac{1}{h} |\int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0))dt| \stackrel{23.8}{\leq} \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} |f(t) - f(x_0)|dt$ ;  $s(h) := \sup\{|f(t) - f(x_0)| : t \in [x_0, x_0 + h]\} \implies g(h) \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} s(h)dt = \frac{1}{h} s(h)h = s(h)$ . Also:  $0 \leq g(h) \leq s(h)$ .  $f$  stetig in  $x_0 \implies f(t) \rightarrow f(x_0)$  ( $t \rightarrow x_0$ )  $\implies s(h) \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0+$ )  $\implies g(h) \rightarrow 0$  ( $h \rightarrow 0+$ )  $\implies (*)$

(3) : (2)  $\implies$  (3)  $\implies$  (4) ■

**Satz 23.14 (Anwendung des 2. Hauptsatzes auf stetige Funktionen)**

Sei  $J \subseteq \mathbb{R}$  ein beliebiges Intervall,  $f \in C(J)$  und  $\xi \in J$  (fest).  $F : J \rightarrow \mathbb{R}$  sei definiert durch  $F(x) := \int_{\xi}^x f(t)dt$ . Dann ist  $F \in C^1(J)$  und  $F' = f$  auf  $J$ .

**Beweis**

Seien  $a, b \in J$ ,  $a < b$  und  $I := [a, b]$ . Es genügt zu zeigen:  $F$  ist differenzierbar auf  $I$  und  $F' = f$  auf  $I$ .  $G(x) := \int_a^x f(t)dt$  ( $x \in I$ ). Sei  $\xi \leq a$  (analoger Beweis für  $\xi \geq b$  und  $\xi \in (a, b)$ ). Für  $x \in [a, b] : F(x) = \int_{\xi}^x \dots = \int_{\xi}^a \dots + \int_a^x \dots = F(a) + G(x) \stackrel{23.13}{\implies} F$  ist differenzierbar auf  $I$  und  $F' = G' = f$  auf  $I$ . ■

**Definition**

Im folgenden seien  $I, J \subseteq \mathbb{R}$  beliebige Intervalle.

- (1) Sei  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$  und  $x_0 \in I$ .  $g(x)|_{x=x_0} := g(x_0)$ .
- (2) Ist  $f \in R[a, b]$ , so heißt  $\int_a^b f(x)dx$  auch ein **bestimmtes Integral**.
- (3) Besitzt  $G : I \rightarrow \mathbb{R}$  auf  $I$  eine Stammfunktion, so schreibt man für eine solche auch  $\int g(x)dx$  (**unbestimmtes Integral**). „Gleichungen“ der Form  $\int g(x)dx = h(x)$  gelten bis auf additive Konstanten! **Beispiel:**  $\int e^x dx = e^x$ ,  $\int e^x dx = e^x + 7$ .  $\int g(x)dx = h(x)$  auf  $I$  bedeutet:  $h$  ist eine Stammfunktion von  $g$  auf  $I$ .

**Satz 23.15 (Partielle Integration)**

- (1) Es seien  $f, g \in R[a, b]$  und  $F, G$  seien Stammfunktionen von  $f$  bzw.  $g$  auf  $[a, b]$ . Dann:

$$\int_a^b Fg dx = F(x)G(x)|_a^b - \int_a^b fG dx$$

- (2) Sind  $f, g \in C^1[a, b] \implies$

$$\int_a^b f'g dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b fg' dx$$

- (3) Sind  $f, g \in C^1(I) \implies$  auf  $I$  gilt:

$$\int f'g dx = f(x)g(x) - \int fg' dx$$

**Beweis**

- (1)  $(FG)' = F'G + FG' = fG + Fg \implies \int_a^b Fg dx + \int_a^b fG dx = \int_a^b (FG)' dx \stackrel{23.5}{=} F(x)G(x)|_a^b$
- (2) folgt aus (1)
- (3)  $(fg)' = f'g + fg' \implies fg = \int (f'g + fg') dx$  ■

**Beispiele:**

$$(1) \int \log x dx = \int \underbrace{1}_{f'} \underbrace{\log x}_g dx = x \log x - \int x \frac{1}{x} dx = x \log x - x \text{ auf } (0, \infty).$$

$$(2) \int \sin^2 x dx = \int \underbrace{\sin x}_{f'} \underbrace{\sin x}_g dx = -\cos x \sin x - \int -\cos^2 x dx = -\cos x \sin x + \int (1 - \sin^2 x) dx = \\ -\cos x \sin x + x - \int \sin^2 x dx \\ \implies \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \cos x \sin x) \text{ auf } \mathbb{R}.$$

$$(3) \int \underbrace{x}_{f'} \underbrace{e^x}_g dx = \frac{1}{2}x^2 e^x - \int \frac{1}{2}x^2 e^x dx \text{ komplizierter!} \\ \int \underbrace{x}_f \underbrace{e^x}_{g'} dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$$

**Satz 23.16 (Substitutionsregeln)**

Sei  $f \in C(I)$  und  $g \in C^1(J)$  und  $g(J) \subseteq I$ .

(1) Ist  $J = [\alpha, \beta] \implies$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(t)dt$$

(2) Auf  $J$  gilt:

$$\int f(g(t))g'(t)dt = \int f(x)dx|_{x=g(t)}$$

(3)  $g$  sei auf  $J$  streng monoton  $\implies$  auf  $I$  gilt:

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g'(t)dt|_{t=g^{-1}(x)}$$

**Merkregel**

Ist  $y = y(x)$  differenzierbar, so schreibt man für  $y'$  auch  $\frac{dy}{dx}$ . In 23.16 substituiere  $x = g(t)$  (fasse also  $x$  als Funktion von  $t$  auf)  $\implies g'(t) = \frac{dx}{dt}$  „  $\implies dx = g'(t)dt$ “.

**Beweis**

(2) Sei  $F$  eine Stammfunktion von  $f$  auf  $I$ .  $G(t) := F(g(t))$  ( $t \in J$ ).  $G'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$  ( $t \in J$ )  $\implies G$  ist eine Stammfunktion von  $(f \circ g)g'$  auf  $J \implies$  (2)

(1)  $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(t))g'(t)dt \stackrel{23.5}{=} G(\beta) - G(\alpha) = F(g(\beta)) - F(g(\alpha)) \stackrel{23.5}{=} \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(x)dx$ .

(3)  $\int f(g(t))g'(t)dt|_{t=g^{-1}(x)} = G(g^{-1}(x)) = F(g(g^{-1}(x))) = F(x)$  ■

**Beispiele:**

(1)  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx$  (Substitution  $x = \sin t$ ,  $t = 0 \implies x = 0$ ,  $t = \frac{\pi}{2} \implies x = 1$ ,  $dx = \cos t dt$ ).  
 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t| \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t) dt = t - \frac{1}{2}(t - \cos t \sin t)|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$ .

(2)  $\int \frac{1}{x \log x} dx$  (Substitution  $x = e^t$ ,  $t = \log x$ ,  $dt = \frac{1}{x} dx$ ).  $\int \frac{1}{x \log x} = \int \frac{1}{t} dt = \log t = \log(\log(x))$  auf  $(1, \infty)$ .

**Definition**

(1) Seien  $p$  und  $q$  Polynome und  $q \neq 0$ . Dann heißt  $\frac{p}{q}$  eine **rationale Funktion**.

$\frac{p}{q}$  hat eine Darstellung der Form  $\frac{p}{q} = p_1 + \frac{p_2}{q}$ , wobei  $p_1, p_2$  Polynome und  $\frac{p_2}{q}$  **echt gebrochen rational**, d.h.:  $\text{Grad } p_2 < \text{Grad } q$ .

(2) Seien  $b, c \in \mathbb{R}$ . Dann heißt das Polynom  $x^2 + bx + c$  **unzerlegbar** über  $\mathbb{R}$  :  $\iff 4c - b^2 > 0$  ( $\iff x^2 + bx + c \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ )

(3) Ein **Partialbruch** ist eine rationale Funktion der Form

$$\frac{A}{(x-x_0)^k}$$

wobei  $A, x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , oder

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + bx + c)^k}$$

wobei  $A, B, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  und  $x^2 + bx + c$  unzerlegbar über  $\mathbb{R}$ .

**Satz 23.17 (Integration von rationalen Funktionen)**

Es seien  $b, c, x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m > 1$ ,  $p(x) := x^2 + bx + c$  und  $D := 4c - b^2 > 0$

$$(1) \int \frac{1}{x - x_0} dx = \log |x - x_0|$$

$$(2) \int \frac{1}{(x - x_0)^m} dx = \frac{-1}{m - 1} \cdot \frac{1}{(x - x_0)^{m-1}}$$

$$(3) \int \frac{1}{p(x)} dx = \frac{2}{\sqrt{D}} \arctan \left( \frac{2x + b}{\sqrt{D}} \right)$$

$$(4) \int \frac{1}{p(x)^m} dx = \frac{1}{(m - 1)D} \cdot \frac{2x + b}{p(x)^{m-1}} + \frac{4m - 6}{(m - 1)D} \int \frac{1}{p(x)^{m-1}} dx$$

$$(5) \int \frac{x}{p(x)} dx = \frac{1}{2} \log(p(x)) - \frac{b}{2} \int \frac{1}{p(x)} dx$$

$$(6) \int \frac{x}{p(x)^m} dx = \frac{-1}{2(m - 1)} \cdot \frac{1}{p(x)^{m-1}} - \frac{b}{2} \int \frac{1}{p(x)^m} dx$$

**Beweis**

(1) klar

(2) klar

$$(3) p(x) = x^2 + bx + c = x^2 + bx + \frac{b^2}{4} + c - \frac{b^2}{4} = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{D}{4} = \frac{D}{4} \left(\frac{4}{D} \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + 1\right) = \frac{D}{4} \left(\left(\frac{2x+b}{\sqrt{D}}\right)^2 + 1\right) = \frac{D}{4} (t^2 + 1), \text{ wobei } t = \frac{2x+b}{\sqrt{D}}, \text{ also } x = \frac{\sqrt{D}t-b}{2}$$

$$\implies \int \frac{1}{p(x)} dx = (\text{Substitution } t = \frac{2x+b}{\sqrt{D}}, dx = \frac{\sqrt{D}}{2} dt) \frac{4}{D} \int \frac{1}{t^2+1} \cdot \frac{\sqrt{D}}{2} dt = \frac{2}{\sqrt{D}} \int \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{D}} \arctan t = \frac{2}{\sqrt{D}} \arctan \left(\frac{2x+b}{\sqrt{D}}\right)$$

(4) Übung, partielle Integration

$$(5) \int \frac{x}{p(x)} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+b-b}{p(x)} dx = \frac{1}{2} \int \underbrace{\frac{p'(x)}{p(x)}}_{\log(p(x))} dx - \frac{b}{2} \int \frac{1}{p(x)} dx$$

(6) Übung, partielle Integration ■

**Definition**

(1) Sei  $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$ ,  $I_j = [x_{j-1}, x_j]$  ( $j = 1, \dots, n$ )

$|Z| := \max\{|I_j| : j = 1, \dots, n\}$  heißt das **Feinheitsmaß** von  $Z$ .

- (2)  $\mathfrak{Z}^* := \{(Z, \xi) : Z \in \mathfrak{Z}, \xi \text{ ist passend zu } Z\}$ . Eine Folge  $((Z_n, \xi^{(n)}))$  in  $\mathfrak{Z}^*$  heißt eine **Nullfolge** :  $\iff |Z_n| \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$

**Satz 23.18 (Folgen von Zerlegungen mit  $|Z_n| \rightarrow 0$ )**

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei beschränkt; sei  $\gamma \geq 0$  mit:  $|f(x)| \leq \gamma \ \forall x \in [a, b]$ .

- (1) Sind  $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z}$  und  $Z_1 \subseteq Z_2$  und enthält  $Z_2$  genau  $p$  Teilpunkte mehr als  $Z_1$ , dann gilt:

$$s_f(Z_2) \leq s_f(Z_1) + 2p\gamma|Z_1| \text{ und}$$

$$S_f(Z_2) \geq S_f(Z_1) - 2p\gamma|Z_1|.$$

- (2)  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall Z \in \mathfrak{Z}$  mit  $|Z| < \delta$ :

$$s_f(Z) > \int_a^b f dx - \varepsilon, \ S_f(Z) < \int_a^b f dx + \varepsilon.$$

- (3) Ist  $(Z_n)$  eine Folge in  $\mathfrak{Z}$  mit  $|Z_n| \rightarrow 0$ , dann gilt:

$$s_f(Z_n) \rightarrow \int_a^b f dx, \ S_f(Z_n) \rightarrow \int_a^b f dx.$$

**Beweis**

- (1) Übung, es genügt den Fall  $p = 1$  zu betrachten.

- (2) Beweis nur für Untersummen. Sei  $\varepsilon > 0$ .  $\exists Z_1 \in \mathfrak{Z} : s_f(Z_1) > \int_a^b f dx - \frac{\varepsilon}{2}$ ;  $Z_1$  habe  $p$  Teilpunkte.  $\delta := \frac{\varepsilon}{4\gamma p}$ .

Sei  $Z \in \mathfrak{Z}$  und  $|Z| < \delta$ .  $Z_2 := Z \cup Z_1 \in \mathfrak{Z}$ ;  $Z_2$  hat höchstens  $p$  Teilpunkte mehr als  $Z \implies s_f(Z) = \underbrace{s_f(Z) - s_f(Z_2)}_{\substack{> -2p\gamma|Z| \\ (1)}} + \underbrace{s_f(Z_2)}_{\geq s_f(Z_1)} > -2p\gamma|Z| + s_f(Z_1) > \underbrace{-2\gamma p\delta}_{=\frac{\varepsilon}{2}} + \int_a^b f dx - \frac{\varepsilon}{2} = \int_a^b f dx - \varepsilon.$

- (3) Nur für Untersummen.  $A := \int_a^b f dx$ ,  $s_n := s_f(Z_n)$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Aus (2) folgt dann:  $\exists \delta > 0 : s_f(Z) > A - \varepsilon \ \forall Z \in \mathfrak{Z}$  mit  $|Z| < \delta$ .  $\exists n_0 \in \mathbb{N} : |Z_n| < \delta \ \forall n \geq n_0$ . Also:  $s_n \rightarrow A \ (n \rightarrow \infty)$ .

**Beispiel**

$$a_n := \sum_{j=1}^n \frac{\sqrt{j}}{n^{3/2}}. \text{ Behauptung : } a_n \rightarrow \frac{2}{3}$$

**Beweis**

$$a_n = \sum_{j=1}^n \underbrace{\sqrt{\frac{j}{n}}}_{=f(\frac{j}{n})} \frac{1}{n}, \ f(x) = \sqrt{x}, \ x \in [0, 1].$$

$$Z_n = \{0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}\} \implies a_n = S_f(Z_n) \xrightarrow[23.18(3)]{n \rightarrow \infty} \int_0^1 \sqrt{x} dx = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \quad \blacksquare$$

**Satz 23.19 (Riemannsche Definition des Integrals mit Nullfolgen)**

$f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  sei beschränkt.  $f \in R[a, b] \iff \exists S \in \mathbb{R} : \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \rightarrow S \ (n \rightarrow \infty)$  für jede Nullfolge  $((Z_n, \xi^{(n)})) \in \mathfrak{Z}^*$ . In diesem Fall gilt:  $S = \int_a^b f dx$ .

**Beweis**

„ $\Rightarrow$ “:  $S := \int_a^b f dx$ . Sei  $((Z_n, \xi^{(n)})) \in \mathfrak{Z}^*$  eine Nullfolge. Dann:

$$\underbrace{s_f(Z_n)}_{\xrightarrow{23.18} S} \leq \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \leq \underbrace{S_f(Z_n)}_{\xrightarrow{23.18} S} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

$$\implies \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}) \rightarrow S \ (n \rightarrow \infty).$$

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $\varepsilon > 0$  und  $(Z_n)$  eine Folge in  $\mathfrak{Z}$  mit  $|Z_n| \rightarrow 0$ . Wie im Beweis von 23.12:  $\forall n \in \mathbb{N} \exists \xi^{(n)}, \eta^{(n)}$  passend zu  $Z_n$  mit:

$$S_f(Z_n) - \varepsilon < \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}); \quad \sigma(Z_n, \eta^{(n)}) < s_f(Z_n) + \varepsilon$$

Aus 23.18(3) folgt für  $n \rightarrow \infty$ :  $\int_a^b f dx - \varepsilon \leq S \leq \int_a^b f dx + \varepsilon \ \forall \varepsilon > 0 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^b f dx \leq S \leq \int_a^b f dx \implies f \in R[a, b]$  und  $\int_a^b f dx = S$ .  $\blacksquare$

**Beispiel**

*Bemerkung: Dies ist ein Beispiel zum nächsten Satz, nicht zum vorherigen.*

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx) \ (n \in \mathbb{N}, x \in [0, \pi]); \quad |f_n(x)| = \frac{1}{n} |\sin(nx)| \leq \frac{1}{n} \ \forall x \in [0, \pi].$$

$\implies (f_n)$  konvergiert gleichmäßig auf  $[0, \pi]$  gegen  $f \equiv 0$ .

$f'_n(x) = \cos(nx)$ ,  $f'_n(\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$ . Das heißt:  $(f'_n)$  konvergiert auf  $[0, \pi]$  *nicht* punktweise.

**Satz 23.20 (Gleichmäßige Konvergenz der Stammfunktion)**

$(f_n)$  sei eine Folge in  $C^1[a, b]$ ,  $x_0 \in [a, b]$  und es gelte:

- (i)  $(f_n(x_0))$  konvergiert
- (ii)  $(f'_n)$  konvergiert gleichmäßig auf  $[a, b]$  gegen  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ .

Dann konvergiert  $(f_n)$  gleichmäßig auf  $[a, b]$  und für  $f(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  ( $x \in [a, b]$ ) gilt:  $f \in C^1[a, b]$  und  $f' = g$  auf  $[a, b]$ .

Also:  $(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))' = f'(x) = g(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \ \forall x \in [a, b]$ .

**Beweis**

O.B.d.A.:  $x_0 = a$  und  $f_n(a) \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ).  $f(x) := \int_a^x g(t)dt$  ( $x \in [a, b]$ ). Aus 19.2 folgt:  $g \in C[a, b]$ .

Damit wegen 23.13:  $f \in C^1[a, b]$  und  $f' = g$  auf  $[a, b]$ .

$$\text{Sei } x \in [a, b] : f_n(x) - \underbrace{f_n(a)}_{\rightarrow 0} \stackrel{23.5}{=} \int_a^x f'_n(t)dt \stackrel{23.6}{\rightarrow} \int_a^x g(t)dt = f(x).$$

$\implies (f_n)$  konvergiert punktweise gegen  $f$ .

$$\text{Für } x \in [a, b] : |f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - f_n(a) - f(x) + f_n(a)| = \left| \int_a^x (f'_n(t) - g(t))dt + f_n(a) \right| \leq \int_a^x |f'_n - g|dt + |f_n(a)| \leq \int_a^b |f'_n - g|dt + |f_n(a)| =: c_n$$

Wegen Voraussetzung (ii) konvergiert  $(|f'_n - g|)$  auf  $[a, b]$  gleichmäßig gegen 0. Wegen 23.6 folgt damit:  $\int_a^b |f'_n - g|dt \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ )  $\implies c_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ )  $\implies (f_n)$  konvergiert gleichmäßig auf  $[a, b]$  gegen  $f$ . ■

Wir können nun den Satz 21.9 beweisen.

**Beweis**

Sei  $a < b$  und  $[a, b] \subseteq I$ .  $f_n(x) := \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ,  $f'_n(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}$ ,  $g(x) := \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$

Aus 19.1 folgt:  $(f_n)$  und  $(f'_n)$  konvergieren auf  $[a, b]$  gleichmäßig gegen  $f$  bzw.  $g$ . Wegen unserem neuen Satz 23.20 nun ist  $f$  auf  $[a, b]$  differenzierbar und  $f' = g$  auf  $[a, b]$ .  $[a, b] \subseteq I$  beliebig  $\implies$  Beh. ■

## 24. Uneigentliche Integrale

In diesem Paragraphen gelte stets: Ist  $I \subseteq \mathbb{R}$  ein Intervall und  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion, so gelte  $\varphi \in R[a, b]$  für jedes Intervall  $[a, b] \subseteq I$ .

**(I) 1. Typ uneigentlicher Integrale** Sei  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ,  $a < \beta$  und  $f : [a, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ . Existiert der Grenzwert  $\lim_{t \rightarrow \beta} \int_a^t f(x) dx$  und ist dieser Grenzwert reell, so heißt das **uneigentliche Integral**  $\int_a^\beta f(x) dx$  **konvergent** und  $\int_a^\beta f(x) dx := \lim_{t \rightarrow \beta} \int_a^t f(x) dx$ . Ist das Integral  $\int_a^\beta f(x) dx$  nicht konvergent, so heißt es **divergent**.

**Beispiele:**

(1)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (a=0, \beta=1)$$

Für  $t \in (0, 1)$ :  $\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin |t| = \arcsin t \rightarrow \frac{\pi}{2}$  ( $t \rightarrow 1$ ). Das heißt:  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$  konvergiert und hat den Wert  $\frac{\pi}{2}$ .

(2)

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx \quad (a=0, \beta=\infty)$$

Für  $t > 0$ :  $\int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x|_0^t = \arctan t \rightarrow \frac{\pi}{2}$  ( $t \rightarrow \infty$ ). Also:  $\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$  konvergiert und hat den Wert  $\frac{\pi}{2}$ .

(3) (*wichtig*) Sei  $\alpha > 0$ . Übung:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ konvergiert} \iff \alpha > 1$$

**(II) 2. Typ uneigentlicher Integrale** Sei  $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha < a$  und  $f : (\alpha, a] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Entsprechend zum 1. Typ definiert man die Konvergenz bzw. Divergenz des uneigentlichen Integrals  $\int_\alpha^a f(x) dx$  (nämlich  $\lim_{t \rightarrow \alpha} \int_t^a f(x) dx$ ).

**Beispiele:**

(1)

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{1+x^2} dx$$

Für  $t < 0$ :  $\int_t^0 \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x|_t^0 = -\arctan t = \arctan(-t) \rightarrow \frac{\pi}{2}$  ( $t \rightarrow -\infty$ )

(2) (*wichtig*) Sei  $\alpha > 0$ . Übung:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} dx \text{ konvergiert} \iff \alpha < 1$$

**(III) 3. Typ uneigentlicher Integrale** Sei  $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $\beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ ,  $\alpha < \beta$  und  $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion. Das uneigentliche Integral  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$  ist **konvergent**, genau dann wenn es ein  $c \in (\alpha, \beta)$  gibt mit:  $\int_{\alpha}^c f(x) dx$  konvergiert und  $\int_c^{\beta} f(x) dx$  konvergiert. In diesem Fall gilt:  $\int_{\alpha}^{\beta} f dx := \int_{\alpha}^c f dx + \int_c^{\beta} f dx$  (Übung: diese Definition ist unabhängig von  $c$ )

**Beispiele:**

- (1)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$  konvergiert und hat den Wert  $\pi$ .
- (2)  $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^2} dx$  divergiert, denn  $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$  divergiert.

Das Folgende formulieren wir nur für den Typ (I) (sinngemäß gilt alles auch für Typ (II), (III)):

**Definition**

$\int_a^{\beta} f dx$  heißt **absolut konvergent** :  $\iff \int_a^{\beta} |f| dx$  ist konvergent.

**Satz**

Sei  $g : [a, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  eine weitere Funktion.

- (1)  $\int_a^{\beta} f dx$  konvergiert  $\iff \exists c \in (a, \beta) : \int_c^{\beta} f dx$  konvergiert.

In diesem Fall gilt:  $\int_a^{\beta} f dx = \int_a^c f dx + \int_c^{\beta} f dx$ .

- (2) **Cauchy Kriterium:**  $\int_a^{\beta} f dx$  konvergiert  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists c = c(\varepsilon) \in (a, \beta) : |\int_u^v f dx| < \varepsilon \forall u, v \in (c, \beta)$
- (3) Ist  $\int_a^{\beta} f dx$  absolut konvergent, dann gilt:  $\int_a^{\beta} f dx < \int_a^{\beta} |f| dx$  und  $|\int_a^{\beta} f dx| < \int_a^{\beta} |f| dx$ .
- (4) **Majorantenkriterium:** Ist  $|f| \leq g$  auf  $[a, \beta)$  und  $\int_a^{\beta} g dx$  konvergent, dann konvergiert  $\int_a^{\beta} f dx$  absolut.
- (5) **Minorantenkriterium:** Ist  $f \geq g \geq 0$  auf  $[a, \beta)$  und  $\int_a^{\beta} g dx$  divergent, dann divergiert  $\int_a^{\beta} f dx$ .

**Beispiele:**

- (1)  $\int_1^{\infty} \underbrace{\frac{x}{1+x^2}}_{=: f(x)} dx$ ,  $g(x) := \frac{1}{x} \cdot \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2}{1+x^2} \rightarrow 1 (x \rightarrow \infty)$ .

$\implies \exists c \in (1, \infty) : \frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{1}{2} \forall x \geq c \implies f(x) \geq \frac{1}{2x} \forall x \geq c$ .  $\int_c^{\infty} \frac{1}{2x} dx$  divergiert  
 $\implies \int_c^{\infty} f(x) dx$  divergiert  $\implies \int_1^{\infty} f(x) dx$  divergiert.

- (2)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ .  $\int_0^1 f(x) dx$  konvergiert,  $\int_0^1 f^2(x) dx$  divergiert.

## 25. Funktionen von beschränkter Variation

### Definition

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$ .  $V_f(Z) := \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})|$  ist die **Variation** von  $f$  bezüglich  $Z$ .

**Beachte:** Sind  $Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z}$  und  $Z_1 \subseteq Z_2 \implies V_f(Z_1) \leq V_f(Z_2)$ .  $M_f = \{V_f(Z) : Z \in \mathfrak{Z}\}$ .  $f$  heißt von **beschränkter Variation**, in Zeichen:  $f \in \text{BV}[a, b] : \iff M_f$  ist nach oben beschränkt. In diesem Fall heißt  $V_f[a, b] := \sup M_f$  die **Totalvariation** von  $f$  (auf  $[a, b]$ ).

### Beispiel

$$f(x) := \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{x}, & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

$f \in C[0, 1]$ . Sei  $n \in \mathbb{N}$ .  $Z_n := \{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n-2}, \dots, \frac{1}{n-(n-1)}\}$ . Nachrechnen:  $V_f(Z_n) \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Also:  $f \notin \text{BV}[0, 1]$ .

### Hilfssatz

Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  differenzierbar auf  $[a, b]$  und  $f'$  sei auf  $[a, b]$  beschränkt. Dann ist  $f$  auf  $[a, b]$  Lipschitz-stetig.

### Beweis

$L := \sup\{|f'(x)| : x \in [a, b]\}$ . Sei  $x, y \in [a, b]$ , etwa  $x \leq y$ .  $|f(x) - f(y)| = |f'(\xi)(x - y)| = |f'(\xi)||x - y| \leq L|x - y|, \xi \in [x, y]$ . ■

### Satz 25.1 (Varianzeigenschaften)

- (1) Ist  $f \in \text{BV}[a, b] \implies f$  ist beschränkt auf  $[a, b]$ .
- (2) Ist  $f$  auf  $[a, b]$  Lipschitz-stetig  $\implies f \in \text{BV}[a, b]$ .
- (3) Ist  $f$  differenzierbar auf  $[a, b]$  und  $f'$  beschränkt auf  $[a, b] \implies f \in \text{BV}[a, b]$
- (4)  $C^1[a, b] \subseteq \text{BV}[a, b]$
- (5) Ist  $f$  monoton auf  $[a, b] \implies f \in \text{BV}[a, b]$  und  $V_f[a, b] = |f(b) - f(a)|$
- (6)  $\text{BV}[a, b]$  ist ein reeller Vektorraum
- (7) Ist  $c \in (a, b)$ , so gilt:  $f \in \text{BV}[a, b] \iff f \in \text{BV}[a, c]$  und  $f \in \text{BV}[c, b]$ . In diesem Fall:  $V_f[a, b] = V_f[a, c] + V_f[c, b]$ .

### Beweis

- (1) Sei  $x \in [a, b]$  (beliebig, fest).  $Z := \{a, x, b\}$ ,  $V_f(Z) = |f(x) - f(a)| + |f(b) - f(x)| \leq V_f[a, b] \implies |f(x)| = |f(x) - f(a) + f(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \leq V_f(Z) + |f(a)| \leq V_f[a, b] + |f(a)|$

- (2)  $\exists L \geq 0 : |f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \forall x, y \in [a, b]$ . Sei  $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$ .  $\sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| \leq \sum_{j=1}^n L|x_j - x_{j-1}| = L \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = L(b - a)$
- (3) folgt aus (2) und dem Hilfssatz
- (4) folgt aus (3)
- (5)  $f$  sei wachsend auf  $[a, b]$ . Sei  $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$ .  $V_f(Z) = \sum_{j=1}^n |f(x_j) - f(x_{j-1})| = \sum_{j=1}^n f(x_j) - f(x_{j-1}) = f(b) - f(a) = |f(b) - f(a)|$
- (6) Übung.
- (7)  $I := [a, b], I_1 := [a, c], I_2 := [c, b]$ .

„ $\Rightarrow$ “: Sei  $Z_1$  eine Zerlegung von  $I_1$  und  $Z_2$  eine Zerlegung von  $I_2$ .  $Z := Z_1 \cup Z_2 \implies Z \in \mathfrak{Z}$  und  $V_f(Z_1), V_f(Z_2) \leq V_f(Z) = V_f(Z_1) + V_f(Z_2) \leq V_f(Z) \leq V_f[a, b] \implies f \in \text{BV}(I_1)$  und  $f \in \text{BV}(I_2)$  und  $V_f(I_1) + V_f(I_2) \leq V_f[a, b]$

„ $\Leftarrow$ “: Sei  $Z \in \mathfrak{Z}, \tilde{Z} := Z \cup \{c\}, Z_1 := \tilde{Z} \cap I_1, Z_2 := \tilde{Z} \cap I_2$ .  $Z_1$  und  $Z_2$  sind Zerlegungen von  $I_1$  bzw.  $I_2$  und  $V_f(Z) \stackrel{\text{s.o.}}{\leq} V_f(\tilde{Z}) = V_f(Z_1) + V_f(Z_2) \leq V_f(I_1) + V_f(I_2) \implies f \in \text{BV}[I]$  und  $V_f(I) \leq V_f(I_1) + V_f(I_2)$ . ■

**Satz 25.2 (Eigenschaften Funktion von beschränkter Varianz)**

- (1)  $f \in \text{BV}[a, b] \iff \exists f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  mit:  $f_1, f_2$  sind wachsend auf  $[a, b]$  und  $f = f_1 - f_2$ .
- (2)  $\text{BV}[a, b] \subseteq \text{R}[a, b]$ .
- (3) Ist  $f \in C^1[a, b] \implies V_f[a, b] = \int_a^b |f'| dx$ .

**Beweis**

- (3) später in allgemeiner Form (Analysis II, §12 od. §13)
- (2) folgt aus (1) und 23.4
- (1) „ $\Rightarrow$ “:  $V_f[a, a] := 0, f_1(x) := V_f([a, x]) (x \in [a, b]), f_2 := f_1 - f$ . Dann:  $f = f_1 - f_2$ . Seien  $c, d \in [a, b]$  und  $c < d$ .  $f_1(d) = V_f[a, d] \stackrel{25.1(7)}{=} V_f[a, c] + V_f[c, d] = f_1(c) + \underbrace{V_f[c, d]}_{\geq 0} \geq f_1(c) \implies f_1$  ist wachsend.  $f(d) - f(c) \leq |f(d) - f(c)| = V_f(\tilde{Z})$  (wobei  $\tilde{Z} = \{c, d\}$ )  $\leq V_f[c, d] = f_1(d) - f_1(c) \implies f_2(d) - f_2(c) \geq 0 \implies f_2$  ist wachsend.
- „ $\Leftarrow$ “: 25.1(5), (6) ■

## 26. Das Riemann-Stieltjes-Integral

Stets in diesem Paragraphen:  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  beschränkt. RS := Riemann-Stieltjes.

### Definition

- (1) Sei  $(Z, \xi) \in \mathfrak{Z}^*$ .

$$\sigma_f(Z, \xi, g) := \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(g(x_j) - g(x_{j-1}))$$

heißt eine **Riemann-Stieltjes-Summe**.

- (2)  $f$  heißt **Riemann-Stieltjes-integrierbar** bzgl.  $g$  über  $[a, b] : \iff \exists S \in \mathbb{R} : \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}, g) \rightarrow S \quad (n \rightarrow \infty)$  für jede Nullfolge  $((Z_n, \xi^{(n)})) \in \mathfrak{Z}^*$ .

In diesem Fall heißt  $\int_a^b f dg := \int_a^b f(x) dg(x) := S$  das **Riemann-Stieltjes-Integral** von  $f$  bzgl.  $g$  und wir schreiben  $f \in R_g[a, b]$ .  $g$  heißt auch **Integrator(funktion)**.

### Beispiele:

- (1) Ist  $g(x) = x$ , so ist  $R_g[a, b] = R[a, b]$  und  $\int_a^b f dg = \int_a^b f dx$ .
- (2) Ist  $g$  auf  $[a, b]$  konstant  $\implies f \in R_g[a, b]$  und  $\int_a^b f dg = 0$ .
- (3) Sei  $\tau \in (a, b)$ .

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [a, \tau) \\ 1, & x \in [\tau, b] \end{cases}$$

Sei  $(Z, \xi) \in \mathfrak{Z}^*$ ,  $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ . Es existiert genau ein  $j_0$  mit  $\tau \in (x_{j_0-1}, x_{j_0}]$ .

$$\sigma_f(Z, \xi, g) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(g(x_j) - g(x_{j-1})) = f(\xi_{j_0})(g(x_{j_0}) - g(x_{j_0-1})) = f(\xi_{j_0}).$$

Ist  $f$  stetig in  $\tau \implies f \in R_g[a, b]$  und  $\int_a^b f dg = f(\tau)$ .

### Satz 26.1

- (1)  $R_g[a, b]$  ist ein reeller Vektorraum und die Abbildung

$$f \mapsto \int_a^b f dg$$

ist linear.

- (2) Sei  $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine weitere beschränkte Funktion,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,  $f \in R_g[a, b]$  und  $f \in R_h[a, b]$ . Dann gilt:  $f \in R_{\alpha g + \beta h}[a, b]$  und  $\int_a^b f d(\alpha g + \beta h) = \alpha \int_a^b f dg + \beta \int_a^b f dh$ .

(3) Sei  $c \in (a, b)$  und  $f \in R_g[a, b] \implies f \in R_g[a, c], f \in R_g[c, b]$  und  $\int_a^b f dg = \int_a^c f dg + \int_c^b f dg$ .

**Beweis**

Übung. ■

Bemerkung zu 26.1(3): Ist  $f \in R_g[a, c]$  und  $f \in R_g[c, b]$ , so gilt i.A. nicht:  $f \in R_g[a, b]$  (Beispiel: Übungen).

**Satz 26.2 (Partielle Integration)**

Ist  $f \in R_g[a, b] \implies g \in R_f[a, b]$  und

$$\int_a^b f dg = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b g df.$$

**Beweis**

Sei  $(Z, \xi) \in \mathfrak{Z}^*$ ,  $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ ,  $\xi_0 := a$ ,  $\xi_{n+1} := b$ .

Nachrechnen:  $\sigma_g(Z, \xi, f) = \underbrace{f(x)g(x)|_a^b}_{=:c} - \underbrace{\sum_{j=0}^n f(x_j)(g(\xi_{j+1}) - g(\xi_j))}_{=:A}$

Die verschiedenen unter den Punkten  $\xi_0, \dots, \xi_{n+1}$  definieren eine Zerlegung  $\tilde{Z} \in \mathfrak{Z}$  mit  $|\tilde{Z}| \leq 2|Z|$ . Dann ist  $A$  eine RS-Summe  $\sigma_f(\tilde{Z}, \eta, g)$ , wobei  $\eta$  geeignet zu wählen ist.

Also:  $\sigma_g(Z, \xi, f) = c - \sigma_f(\tilde{Z}, \eta, g)$ .

Sei  $((Z_n, \xi^{(n)}) \in \mathfrak{Z}^*$  eine Nullfolge. Zu jeden  $(Z_n, \xi^{(n)})$  konstruiere  $(\tilde{Z}_n, \eta^{(n)})$  wie oben. Dann ist  $((\tilde{Z}_n, \eta^{(n)})$  eine Nullfolge in  $\mathfrak{Z}^*$  und  $\sigma_g(Z_n, \xi^{(n)}, f) = c - \sigma_f(\tilde{Z}_n, \eta^{(n)}, g) \forall n \in \mathbb{N}$ . Aus der Voraussetzung folgt:  $\sigma_f(\tilde{Z}_n, \eta^{(n)}, g) \rightarrow \int_a^b f dg \implies \sigma_g(Z_n, \xi^{(n)}, f) \rightarrow c - \int_a^b f dg \quad (n \rightarrow \infty)$ . ■

**Beispiel**

$f(x) = x$ ,  $R[a, b] = R_f[a, b]$ . Sei  $g \in R[a, b] = R_f[a, b] \xrightarrow{26.2} f \in R_g[a, b]$  und  $\int_a^b x dg = xg(x)|_a^b - \int_a^b g dx$ .

**Satz 26.3**

Sei  $f \in R[a, b]$ ,  $g$  sei differenzierbar auf  $[a, b]$  und  $g' \in R[a, b]$ . Dann:  $f \in R_g[a, b]$  und

$$\int_a^b f dg = \int_a^b f g' dx.$$

**Beweis**

Sei  $(Z, \xi) \in \mathfrak{Z}^*$ ,  $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ .  $m_j, M_j, I_j$  seien wie immer und  $\alpha > 0$  sei so, dass  $|g'(x)| \leq \alpha \forall x \in [a, b]$ .

Aus dem Mittelwertsatz folgt:  $\forall j \in \{1, \dots, n\} \exists \eta_j \in I_j : g(x_j) - g(x_{j-1}) = g'(\eta_j)|I_j|$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sigma_f(Z, \xi, g) &= \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(g(x_j) - g(x_{j-1})) = \sum_{j=1}^n f(\xi_j)g'(\eta_j)|I_j| \\ &= \sum_{j=1}^n (f(\xi_j) - f(\eta_j))g'(\eta_j)|I_j| + \underbrace{\sum_{j=1}^n f(\eta_j)g'(\eta_j)|I_j|}_{=\sigma_{fg'}(Z, \eta), \eta := (\eta_1, \dots, \eta_n)} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} |\sigma_f(Z, \xi, g) - \sigma_{fg'}(Z, \eta)| &\leq \sum_{j=1}^n \underbrace{|f(\xi_j) - f(\eta_j)|}_{\leq M_j - m_j} \underbrace{|g'(\eta_j)|}_{\leq \alpha} |I_j| \\ &\leq \alpha \sum_{j=1}^n (M_j - m_j)|I_j| = \alpha(S_f(Z) - s_f(Z)). \end{aligned}$$

Sei  $((Z_n, \xi^{(n)}))$  eine Nullfolge. Zu jedem  $(Z_n, \xi^{(n)})$  konstruiere man  $\eta^{(n)}$  wie oben. Dann gilt:

$$|\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}, g) - \underbrace{\sigma_{fg'}(Z_n, \eta^{(n)})}_{\rightarrow \int_a^b fg' dx}| \leq \alpha \underbrace{(S_f(Z_n) - s_f(Z_n))}_{\rightarrow 0}$$

$$\implies \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}, g) \rightarrow \int_a^b fg' dx. \quad \blacksquare$$

**Beispiel**

$$\int_0^1 e^x d(e^{-x}) = \int_0^1 e^x (-e^{-x}) dx = \int_0^1 (-1) dx = -1.$$

**Satz 26.4 (Abschätzen des RS-Integrals mit Hilfe der Totalvarianz)**

Sei  $g \in \text{BV}[a, b]$  und  $f \in R_g$ . Dann:

$$\left| \int_a^b f dg \right| \leq \gamma V_g[a, b], \text{ wobei } \gamma := \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$$

**Beweis**

Sei  $(Z, \xi) \in \mathfrak{Z}^*$ ,  $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ ,  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ .

$$|\sigma_f(Z, \xi, g)| = \left| \sum_{j=1}^n f(\xi_j)(g(x_j) - g(x_{j-1})) \right| \leq \sum_{j=1}^n |f(\xi_j)| |g(x_j) - g(x_{j-1})| \leq \gamma V_g(Z) \leq \gamma V_g[a, b] \blacksquare$$

**Bezeichnungen**

Sei  $Z = \{x_0, \dots, x_n\} \in \mathfrak{Z}$ .  $m_j, M_j, I_j$  seien wie immer,  $d_j := g(x_j) - g(x_{j-1})$  ( $j = 1, \dots, n$ ).  $s(Z) = \sum_{j=1}^n m_j d_j$ ,  $S(Z) = \sum_{j=1}^n M_j d_j$ .

**Hilfssatz 26.5**

$g$  sei wachsend ( $\implies d_j \geq 0$ )

- (1)  $s(Z_1) \leq S(Z_2) \forall Z_1, Z_2 \in \mathfrak{Z}$ .
- (2)  $\sup\{s(z) : z \in \mathfrak{Z}\} \leq S(Z) \forall z \in \mathfrak{Z}$ .

**Beweis**

- (1) Wie in 23.1
- (2) folgt aus (1) ■

**Satz 26.6 (Weiteres Kriterium zur RS-Integrierbarkeit)**

Ist  $f \in C[a, b]$  und  $g \in BV[a, b] \implies f \in R_g[a, b]$ .

**Beweis**

Wegen 25.2 und 26.1(2) O.B.d.A:  $g$  wachsend.  $c := g(b) - g(a)$  ( $\geq 0$ ). O.B.d.A:  $c > 0$ .

1. Sei  $(Z, \xi), Z = \{x_0, \dots, x_n\}, \xi = (\xi_0, \dots, \xi_n), m_j, M_j, I_j, d_j$  seien wie oben.  $S := \sup\{s(z) : z \in \mathfrak{Z}\}$ , also  $S \leq S(Z)$ .  $\alpha := S(Z) - s(Z)$

Es gilt:  $m_j \leq f(\xi_j) \leq M_j \xrightarrow{d_j \geq 0} m_j d_j \leq f(\xi_j) d_j \leq M_j d_j \implies (*) s(z) \leq \sigma_f(Z, \xi, g) \leq S(Z)$ .

Dann:  $-\alpha = s(z) - S(Z) \leq S - S(Z) \stackrel{(*)}{\leq} S - \sigma_f(Z, \xi, g) \leq S(Z) - \sigma_f(Z, \xi, g) \stackrel{(*)}{\leq} S(Z) - s(z) = \alpha \implies |s - \sigma_f(Z, \xi, g)| \leq \alpha = \sum_{j=1}^n (M_j - m_j) d_j$ .

Sei  $\varepsilon > 0$ .  $f$  ist auf  $[a, b]$  **gleichmaig** stetig  $\implies \exists \delta > 0 : |f(t) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{c} \forall t, s \in [a, b]$  mit

$$|t - s| < \delta. \text{ Sei } |Z| < \delta \implies M_j - m_j < \frac{\varepsilon}{c} \implies |s - \sigma_f(Z, \xi, g)| < \frac{\varepsilon}{c} \underbrace{\sum_{j=1}^n d_j}_{=c} = \varepsilon.$$

2. Sei  $((Z_n, \xi^{(n)}))$  eine Nullfolge in  $\mathfrak{Z}^*$ . Sei  $\varepsilon > 0$ . Dann existiert ein  $\delta > 0$  wie in (1),  $|Z_n| \rightarrow 0 \implies \exists n_0 \in \mathbb{N} : |Z_n| < \delta \forall n \geq n_0 \implies |s - \sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}, g)| < \varepsilon \forall n \geq n_0$ . Also:  $\sigma_f(Z_n, \xi^{(n)}, g) \rightarrow S$  ( $n \rightarrow \infty$ ). ■

# A. Satz um Satz (hüpft der Has)

1.3. Betragssätze . . . . .	6
1.5. Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ bezüglich dem Infimum . . . . .	7
1.6. Existenz des Supremum . . . . .	8
2.1. Induktionsmengen . . . . .	9
2.2. Beweisverfahren durch <b>vollständige Induktion</b> . . . . .	9
2.3. <b>Ganze Zahlen</b> . . . . .	10
2.4. Zwischen zwei reellen Zahlen liegt stets eine rationale . . . . .	11
4.1. Eigenschaften von Binomialkoeffizienten . . . . .	14
4.2. Folgerung . . . . .	14
4.3. Bernoullische Ungleichung (BU) . . . . .	14
4.4. Der binomische Satz . . . . .	15
5.2. Wurzeln . . . . .	16
5.3. Eindeutigkeit von rationalen Potenzen . . . . .	17
6.1. Grenzwert und Beschränktheit konvergenter Folgen . . . . .	18
6.2. Konvergenzsätze . . . . .	19
6.3. Monotoniekriterium . . . . .	21
7.1. Konvergenzsatz für Wurzeln . . . . .	22
7.4. Satz über $\sqrt[n]{n}$ . . . . .	23
7.6. Satz und Definition von $e$ . . . . .	23
8.1. Sätze zu Teilfolgen . . . . .	25
8.2. Satz von Bolzano-Weierstraß . . . . .	26
9.1. Beschränktheit und Abgeschlossenheit der Häufungswerte . . . . .	27
9.2. Eigenschaften des Limes superior und inferior . . . . .	28
9.3. Äquivalenzaussagen zur Konvergenz . . . . .	28
9.5. Rechenregeln für den Limes superior und inferior . . . . .	29

10.1. Cauchy-Kriterium	30
11.1. Cauchy- und Monotoniekriterium sowie Nullfolgeneigenschaft	32
11.2. Rechenregeln bei Reihen	32
11.3. Dreiecksungleichung für Reihen	33
12.1. Leibnizkriterium	34
12.2. Majoranten- und Minorantenkriterium	34
12.3. Wurzelkriterium	35
12.4. Quotientenkriterium	36
12.6. In konvergenten Folgen darf man Klammern setzen	37
13.1. Riemannscher Umordnungssatz	38
13.2. Alle Produktreihen sind Umordnungen voneinander	39
13.3. Absolute Konvergenz geht auf Produktreihen über	39
13.4. Cauchyprodukt absolut konvergierender Folgen konvergiert	40
13.5. $E(r) = e^r \forall r \in \mathbb{Q}$	40
14.1. Konvergenz von Potenzreihen	43
14.2. Konvergenzradien von Cauchyprodukten	44
15.1. Konvergenz $g$ -adischer Entwicklungen	46
15.2. Eindeutigkeit der $g$ -adischen Entwicklung	46
15.3. Existenz der $g$ -adischen Entwicklung	47
15.4. $\mathbb{R}$ ist überabzählbar	47
16.1. Grenzwertsätze bei Funktionen	50
16.2. Rechnen mit Funktionsgrenzwerten	50
16.3. Grenzwerte der Exponentialfunktion	51
17.1. Stetigkeitssätze	53
17.2. Stetigkeit der Potenzreihen	54
17.4. Stetigkeit von verketteten stetigen Funktionen	54
18.1. Zwischenwertsatz	56
18.2. Nullstellensatz von Bolzano	56
18.4. Eigenschaften von Bildmengen stetiger Funktionen	57

18.5. Bildintervalle und Umkehrbarkeit stetiger, monotoner Funktionen . . . . .	58
18.6. Der Logarithmus . . . . .	58
19.1. Funktionskonvergenzkriterien . . . . .	61
19.2. Stetigkeit bei gleichmäßiger Konvergenz . . . . .	61
19.3. Identitätssatz für Potenzreihen . . . . .	62
20.1. Stetigkeitsstätze . . . . .	63
21.1. Differenzierbarkeit und Stetigkeit . . . . .	65
21.2. Ableitungsregeln . . . . .	65
21.3. Kettenregel . . . . .	66
21.4. Ableitung der Umkehrfunktion . . . . .	67
21.5. Erste Ableitung am relativen Extremum . . . . .	67
21.6. Mittelwertsatz der Differenzialrechnung . . . . .	68
21.8. Die Regeln von de l'Hospital . . . . .	69
21.9. Ableitung von Potenzreihen . . . . .	70
21.10Eigenschaften trigonometrischer Funktionen . . . . .	71
21.11Tangens . . . . .	72
22.1. Differenzierbarkeit von Potenzreihen . . . . .	73
22.2. Satz von Taylor . . . . .	74
22.3. Bestimmung von Extrema durch höhere Ableitungen . . . . .	76
23.1. Zerlegungs-Verfeinerungen . . . . .	77
23.2. Rechenregeln für Integrale . . . . .	78
23.3. Riemannsches Integrabilitätskriterium . . . . .	79
23.4. Integrität monotoner und stetiger Funktionen . . . . .	79
23.5. 1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . . .	80
23.6. Integrierbarkeit gleichmäßig konvergierender Funktionsfolgen . . . . .	81
23.7. Integration von verketteten Funktionen . . . . .	82
23.8. Weitere Rechenregeln für Integrale . . . . .	82
23.9. Aufteilung eines Integrals . . . . .	83
23.10Integral und Unstetigkeitsstellen . . . . .	84

23.11	Mittelwertsatz der Integralrechnung	84
23.12	Äquivalenz der Riemanschen und Darboux'schen Integrale	85
23.13	2. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	86
23.14	Anwendung des 2. Hauptsatzes auf stetige Funktionen	86
23.15	Partielle Integration	87
23.16	Substitutionsregeln	88
23.17	Integration von rationalen Funktionen	89
23.18	Folgen von Zerlegungen mit $ Z_n  \rightarrow 0$	90
23.19	Riemannsche Definition des Integrals mit Nullfolgen	91
23.20	Gleichmäßige Konvergenz der Stammfunktion	91
25.1.	Varianzeigenschaften	95
25.2.	Eigenschaften Funktion von beschränkter Varianz	96
26.1.		97
26.2.	Partielle Integration	98
26.3.		98
26.4.	Abschätzen des RS-Integrals mit Hilfe der Totalvarianz	99
26.6.	Weiteres Kriterium zur RS-Integrierbarkeit	100

## B. Credits für Analysis I

Abgetippt haben die folgenden Paragraphen:

- § 1: **Reelle Zahlen:** Joachim Breitner
- § 2: **Natürliche Zahlen:** Joachim Breitner
- § 3: **Folgen, Abzählbarkeit:** Joachim Breitner
- § 4: **Wie Sie Wollen:** Joachim Breitner, Pascal Maillard
- § 5: **Wurzeln und rationale Exponenten:** Jonathan Picht, Joachim Breitner
- § 6: **Konvergente Folgen:** Joachim Breitner, Pascal Maillard
- § 7: **Wichtige Beispiele:** Joachim Breitner
- § 8: **Häufungswerte und Teilfolgen:** Joachim Breitner, Manuel Holtgrewe
- § 9: **Oberer und unterer Limes:** Joachim Breitner
- § 10: **Das Cauchy-Kriterium:** Joachim Breitner, Pascal Maillard
- § 11: **Unendliche Reihen:** Pascal Maillard
- § 12: **Konvergenzkriterien:** Joachim Breitner
- § 13: **Umordnungen und Produkte von Reihen:** Pascal Maillard
- § 14: **Potenzreihen:** Wenzel Jakob
- § 15:  **$g$ -adische Entwicklungen:** Joachim Breitner
- § 16: **Grenzwerte bei Funktionen:** Joachim Breitner
- § 17: **Stetigkeit:** Joachim Breitner
- § 18: **Eigenschaften stetiger Funktionen:** Wenzel Jakob, Joachim Breitner
- § 19: **Funktionsfolgen und -reihen:** Joachim Breitner und Wenzel Jakob
- § 20: **Gleichmäßige Stetigkeit:** Wenzel Jakob
- § 21: **Differenzierbarkeit:** Joachim Breitner, Pascal Maillard und Wenzel Jakob
- § 22: **Höhere Ableitungen:** Joachim Breitner, Pascal Maillard
- § 23: **Das Riemann-Integral:** Pascal Maillard, Wenzel Jakob und Joachim Breitner
- § 24: **Uneigentliche Integrale:** Pascal Maillard
- § 25: **Funktionen von beschränkter Variation:** Wenzel Jakob
- § 26: **Das Riemann-Stieltjes-Integral:** Pascal Maillard und Wenzel Jakob